

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Astronomía y Geodesia.



TESIS DOCTORAL

**Series solución del movimiento de rotación de la tierra
obtenidas por métodos analíticos**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Marta. Folgueira López

DIRECTOR:

M. J. Sevilla de Lerma

Madrid, 2015



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE



532963256X

IT
UCM
1998

Universidad Complutense de Madrid
Facultad de Ciencias Matemáticas
Sección Departamental de Astronomía y Geodesia

Series Solución del Movimiento de
Rotación de la Tierra
obtenidas por Métodos Analíticos

Memoria para optar al título de Doctora en Ciencias Matemáticas de

Marta Folgueira López

Director: Miguel J. Sevilla de Lerma

1998

617155320
I 42 543449

Agradecimientos

La entrega a la labor de formación científica del catedrático de Astronomía y Geodesia D. Miguel J. Sevilla de Lerma, su ayuda y dirección han hecho posible este trabajo, por lo que quiero expresarle mi agradecimiento.

También quiero expresar mi más sincera gratitud a los astrónomos, Jean Souchay (Observatorio de París) e Hiroshi Kinoshita (Observatorio de Tokio) por su apoyo científico y por la confianza que han depositado en mí en la elaboración de los trabajos conjuntos realizados durante este último año y que fueron esenciales en la última parte de esta Memoria. Así mismo, deseo expresarles mi reconocimiento por su importante labor investigadora en este tema.

Deseo también agradecer a la profesora D^a Pilar Romero Pérez sus valiosos consejos especialmente en los momentos iniciales y en la fase final de esta Memoria y al profesor D. Juan Getino Fernández por sus importantes comentarios durante mis estancias en la Universidad de Valladolid.

Por último quiero dar las gracias a todas aquellas personas y en especial a mis padres y hermana que, con su constante aliento, me han ayudado y animado en la realización de este trabajo.

A mis padres y hermana

Índice

Introducción

v

1	El estudio de la Rotación de la Tierra rígida desde la Antigüedad hasta el siglo XX	1
1.1	Introducción.	1
1.2	Precesión, Nutación y Movimiento del polo.	2
1.3	Ejes de rotación, momento angular y de figura.	2
1.4	Orígenes del estudio de la Rotación de la Tierra. Período griego.	4
1.5	Período árabe.	8
1.6	Siglos XIV al XVI.	10
1.7	Siglo XVII.	12
1.8	Siglo XVIII.	13
1.9	Siglo XIX.	15
1.10	Siglo XX.	16
2	Desarrollo del potencial lunisolar de primer orden	19
2.1	Introducción.	19
2.2	Resultados previos.	20
2.2.1	Ecuaciones del movimiento de Hamilton.	20
2.2.2	Transformaciones canónicas.	21
2.3	Las variables de Andoyer.	22
2.3.1	Las variables de Andoyer y el Hamiltoniano referido a la eclíptica móvil.	23
2.4	Energía cinética en función de las variables de Andoyer.	24
2.5	Energía potencial gravitatoria.	25
2.5.1	Fórmulas fundamentales. Polinomios modificados de Jacobi.	25
2.6	Aplicación del desarrollo en armónicos esféricos a la energía potencial gravitatoria.	26
2.6.1	Transformación de variables del ecuador de figura al ecuador momento angular.	26
2.6.2	Transformación de variables del ecuador momento angular a la eclíptica de la fecha.	27
2.6.3	Transformación de variables de la eclíptica de la fecha a la órbita del cuerpo perturbador.	28
2.7	Expresiones de las coordenadas eclípticas de la Luna. Las variables modificadas de Delaunay.	28

2.7.1	Las variables modificadas de Delaunay.	28
2.7.2	Expresiones de las coordenadas eclípticas de la Luna.	30
2.8	Desarrollo de la energía potencial gravitatoria debida a la Luna. Primer orden.	41
2.9	Desarrollo de la energía potencial gravitatoria debida al Sol. Primer orden.	44
2.10	Conclusiones y resultados numéricos.	45
3	Contribuciones al desarrollo del potencial lunisolar de primer orden	81
3.1	Introducción.	81
3.2	Los términos de segundo orden del potencial.	81
3.2.1	Contribución de J_3	81
3.2.2	Contribución de J_4	85
3.2.3	Contribución de los armónicos no zonales de tercer grado.	87
3.2.4	Contribución de los armónicos no zonales C_{41} y S_{41}	92
3.3	La influencia de los planetas en la nutación.	96
3.3.1	Efectos planetarios indirectos. Contribución al potencial solar de primer orden.	97
3.4	Conclusiones y tablas.	98
4	Series solución del movimiento de Rotación de la Tierra rígida	127
4.1	Introducción.	127
4.2	Teorías canónicas de perturbación.	127
4.3	Resultados previos: Paréntesis de Poisson.	128
4.4	El método de Hori. Derivación del efecto nutacional.	129
4.5	Perturbaciones de primer orden.	131
4.5.1	Perturbación periódica debida a W_S	132
4.5.2	Perturbación periódica debida a W_A	136
4.5.3	Efectos del cambio secular de la oblicuidad sobre los términos de nutación.	136
4.6	Perturbaciones de segundo orden debidas a la Luna.	138
4.6.1	Términos de nutación que provienen de $U_2^{J_3}$	138
4.6.2	Términos de nutación que provienen de $U_2^{J_4}$	140
4.6.3	Términos de nutación que provienen de U_2^{CS}	140
4.6.4	Términos de nutación que provienen de U_2^{41}	144
4.7	Conclusiones.	145
5	Resultados numéricos de la nutación lunisolar en longitud y en oblicuidad	147
5.1	Introducción.	147
5.2	Términos de la nutación relacionados con el armónico zonal J_3	147
5.2.1	Nutación del plano perpendicular al eje momento angular.	147
5.2.2	Nutación del ecuador de figura.	149
5.3	Coefficientes de la nutación debidos a la influencia de los armónicos no zonales de grado 3.	150
5.3.1	Términos diurnos.	150
5.3.2	Términos semidiurnos.	155
5.3.3	Términos terciodiurnos.	157

5.4	Términos de la nutación relacionados con el armónico zonal J_4	158
5.4.1	Nutación del plano perpendicular al eje momento angular.	158
5.5	Términos de la nutación relacionados con los armónicos no zonales C_{41} y S_{41} . . .	159
5.6	Contribución solar.	160
5.7	Coefficientes numéricos de la nutación correspondientes a los términos $\Delta_S^{\Delta I}(h, I)$. .	160
5.7.1	Nutación del plano perpendicular al eje momento angular.	160
5.7.2	Nutación del ecuador de figura.	163
5.8	Comparaciones y conclusiones.	164
Apéndice 1		167
Apéndice 2		169
Conclusiones		175
Bibliografía		196

Introducción

La actual teoría de nutación adoptada por la IAU (International Astronomical Union) en 1980 [Seidelmann 1982] comprende las series de nutación construidas, por una parte, a partir de la función de transferencia para las nutaciones de una Tierra con manto elástico, núcleo interno sólido, núcleo externo líquido y sin océanos [Wahr 1979]; y por otra parte, a partir de la teoría de Kinoshita de precesión-nutación de un modelo de Tierra rígida basada en el uso de las ecuaciones canónicas de Hamilton aplicadas a un elipsoide en rotación [Kinoshita 1977].

Por tanto, la precisión de la teoría de la nutación depende principalmente de 2 factores:

- La construcción de un modelo terrestre que describa perfectamente las propiedades reológicas de la Tierra para la determinación precisa de la función de transferencia.
- La precisión de la nutación de un modelo de Tierra rígida. La razón está en que la amplitud de cada término de nutación para un modelo de Tierra no-rígido está relacionado con la amplitud correspondiente para un modelo de Tierra rígido mediante una razón definida por la función de transferencia que depende del modelo terrestre elegido [Wahr 1979].

La comparación entre las series teóricas de la nutación de la IAU 1980 con las estimadas a partir de las observaciones realizadas con técnicas muy precisas como VLBI (Very Long Baseline Interferometry), LLR (Lunar Laser Ranging) y GPS (Global Positioning System) muestra diferencias en amplitud tanto en el dominio del tiempo (hasta 20 *mas* -milisegundos de arco-) como en el dominio de frecuencia (hasta varios *mas*) [Dehant & Defraigne 1997a].

En la XXIII Asamblea General de la IAU (1997) (*Resolución JD3*) se acordó corregir y mejorar las series de la nutación de la IAU 1980 con el fin de reducir las diferencias entre la teoría y la observación [Dehant & Fukushima 1997], [IAU 1998]. Entre las diversas mejoras que hay que introducir para el establecimiento de estas nuevas series de nutación, destacan:

- La adopción de un modelo terrestre que tenga en cuenta también efectos geofísicos como el aplanamiento del núcleo, la inelasticidad del manto, efectos atmosféricos, existencia de océanos, etc. Entre los recientes trabajos que tratan algunos de los efectos anteriores destacan los de [Dehant 1986], [Dehant 1990], [Leffitz *et al.* 1991], [Dehant *et al.* 1993], [Defraigne *et al.* 1995], [Dehant *et al.* 1996], [Dehant & Capitaine 1997], [Dehant & Defraigne 1997b], [Dehant *et al.* 1997a], [Dehant *et al.* 1997c] y [Dehant *et al.* 1997d].

- Extender y comparar las diversas teorías existentes de la nutación de la Tierra rígida. Estas teorías están considerando el orden de truncamiento para cada amplitud individual de $0.1 \mu s$ (microsegundos de arco), orden de precisión de las observaciones actuales.

El orden de precisión de las series de Kinoshita (1977) para la nutación de una Tierra rígida es de solamente $0.1 mas$. Por tanto, si se quiere alcanzar el orden de precisión requerido por la mejora en la precisión de las observaciones será necesario completar y refinar la teoría de Kinoshita.

A este orden de precisión, efectos que anteriormente fueron despreciados, como los debidos a la acción planetaria directa e indirecta, a la triaxialidad de la Tierra, a los coeficientes armónicos zonales y no-zonales del geopotencial de grado 3 y 4: J_3 , J_4 , C_{3m} , S_{3m} ($m = 1, 2, 3$), C_{4m} y S_{4m} ($m = 1, 2, 3, 4$), el efecto de interacción entre el movimiento orbital de la Luna y la componente zonal J_2 "*spin-orbit coupling effect*" y la influencia de la nutación misma sobre el par ejercido por la Luna y el Sol "*crossed-nutation effect*", deberán tenerse en cuenta.

Desde hace varios años, la teoría de la nutación de la Tierra rígida ha sido objeto de muchas revisiones y mejoras. Entre los primeros trabajos que realizan una extensión de la teoría *oficial* destacan los de [Zhu & Groten 1989] y [Kinoshita & Souchay 1990a].

El procedimiento utilizado por Zhu & Groten (1989) es una combinación de dos métodos de cálculo: el utilizado por Kinoshita (1977) y el elaborado por Melchior (1983). Aunque este procedimiento resulta un poco ambigüo e inhomogéneo, con pérdidas de precisión en la determinación de algunos coeficientes nuevos de largo período [Souchay 1993, p. 276], es uno de los primeros trabajos en los que se plantea la necesidad de mejorar la teoría *oficial* de la nutación de la Tierra rígida.

Kinoshita & Souchay (1990) realizaron una reconstrucción completa de las series de nutación de Kinoshita (1977) utilizando las teorías ELP2000 y VSOP82 para el movimiento de la Luna, del Sol y de los planetas [Bretagnon 1982], [Bretagnon 1984], [Chapront-Touzé 1982], [Chapront-Touzé & Chapront 1983]. Para ello tuvieron en cuenta todas las contribuciones individuales que llegaban hasta $0.005 mas$, lo que implicaba el estudio de los efectos planetarios directos e indirectos, la influencia de los términos de segundo orden del potencial terrestre (triaxialidad, J_3 y J_4) y mejoras debidas a una extensión de la teoría al segundo orden como los efectos de interacción entre el movimiento orbital de la Luna y el movimiento rotacional terrestre. Con esta mejora de la teoría de la nutación para un modelo terrestre rígido al segundo orden se incrementó notablemente el número de coeficientes y se modificó también el valor de muchas de las amplitudes obtenidas por Kinoshita (1977).

Recientemente, Williams (1994, 1995), Roosbeek & Dehant (1997), Souchay & Kinoshita (1996, 1997), Souchay *et al.* (1997), Hartmann & Soffel (1994, 1997) y Bretagnon *et al.* (1997) han mejorado de nuevo la teoría de la nutación de la Tierra rígida.

Parece conveniente resumir cada estudio:

- Williams (1994, 1995) hizo nuevas e importantes aportaciones con respecto a trabajos anteriores. En su primer trabajo dio una estimación de la elipticidad dinámica de la Tierra ($H_d = 0.0032737634$) próxima a la de Kinoshita & Souchay (1990) pero basada en las recientes estimaciones de la precesión general en longitud [Williams 1994]. En el segundo artículo calculó el efecto directo de los planetas con un truncamiento de sus series al nivel de $1 \mu s$ [Williams 1995].
- Hartmann & Soffel (1996) calcularon las series de nutación de la Tierra rígida a partir del desarrollo del potencial de marea elaborado por Hartmann & Wenzel (1995). Sus cálculos incluyen todos los efectos ya investigados por Kinoshita & Souchay (1990) pero al nivel de $0.45 \mu s$ en lugar de $5 \mu s$ como en este último trabajo. Además mostraron que el armónico J_4 daba origen a coeficientes de la componente de 18.6 años al nivel de unos pocos μs . El valor que obtuvieron de la elipticidad dinámica era $H_d = 0.0032737925$ [Hartmann & Soffel 1994], [Hartmann & Soffel 1997].
- Roosbeek & Dehant (1997) han calculado la nutación para un modelo de Tierra rígida de una forma clásica, mediante la integración de las ecuaciones relativas al momento angular [Roosbeek & Dehant 1997]. Para este propósito, usaron las mismas efemérides de Kinoshita & Souchay (1990) pero en la nueva versión VSOP87 para calcular el potencial ejercido por el Sol y los planetas [Bretagnon & Francou 1988], y ELP2000 para calcular el potencial debido a la Luna [Chapront-Touzé & Chapront 1988].
- Bretagnon *et al.* (1997) calcularon la precesión y la nutación de la Tierra rígida a partir de las ecuaciones de Euler y las teorías semianalíticas del movimiento de la Luna del *Bureau des Longitudes* [Bretagnon 1997a]. Su trabajo es completo y tienen en cuenta la influencia de todos los armónicos zonales y no-zonales, hasta el grado 4 inclusive, sobre el potencial lunisolar [Bretagnon 1997b], [Bretagnon *et al.* 1997].
- Souchay & Kinoshita (1996) recalcularon la precesión y los términos principales (influencia del armónico zonal J_2) de la nutación para un modelo de Tierra rígida siguiendo el mismo procedimiento que Kinoshita & Souchay (1990). Para ello, utilizaron las mismas efemérides que Roosbeek & Dehant (1997) y tuvieron en cuenta la corrección de la precesión general en longitud con respecto al valor convencional [Lieske *et al.* 1977], apuntada anteriormente por Williams (1994). Demostraron que esta corrección influye notable y directamente sobre el valor de H_d , lo que implicó que todos los coeficientes de la nutación tuvieron que ser modificados. Además, Souchay & Kinoshita observaron algunos errores en las tablas de Kinoshita & Souchay (1990) y fueron corregidos en este trabajo [Souchay & Kinoshita 1996].
- En un segundo artículo, Souchay & Kinoshita (1997) calcularon de nuevo los términos de la nutación debidos a los coeficientes de segundo orden del geopotencial: J_3, J_4, C_{22} y S_{22} y también la influencia directa de los planetas sobre la nutación con un límite

de truncamiento de $0.1 \mu\text{as}$. Sus resultados fueron comparados con los de Hartmann & Soffel (1994) y Williams (1995), observándose una diferencia absoluta en la amplitud de los coeficientes que no excede de $1 \mu\text{as}$ excepto para unos pocos términos. El hecho de que los tres caminos de determinación de los coeficientes sean bastantes diferentes y que los resultados estén muy próximos confirma la validez de los términos encontrados [Souchay & Kinoshita 1997].

- En un tercer trabajo, actualmente en prensa, Souchay *et al.* (1997) calculan al nivel de $0.1 \mu\text{as}$ los efectos de interacción de segundo orden divididos en dos categorías: (a) en el llamado efecto "*spin-orbit coupling*", se estudia la interacción entre el movimiento orbital de la Luna y la componente J_2 del geopotencial. (b) En el denominado efecto "*crossed-nutation*" se estudia la influencia de la nutación misma sobre el par ejercido por la Luna y el Sol, es decir, se tiene en cuenta el pequeño desplazamiento del eje de figura debido a la nutación. El primer efecto fue estudiado por Kubo (1982) y Kinoshita & Souchay (1990) [Kubo 1982]; [Kinoshita & Souchay 1990a]. El segundo fue calculado parcialmente por Kinoshita (1977) y recalculado por Kinoshita & Souchay (1990) [Souchay *et al.* 1997].

En este trabajo se presentan también las tablas finales para la nutación del modelo de Tierra rígida *REN-2000* en las que se incluyen todas las mejoras hechas en los trabajos previos [Souchay & Kinoshita 1996, Souchay & Kinoshita 1997] y las componentes diurnas y subdiurnas de la nutación relacionadas con los armónicos no-zonales de grado 3 y 4, calculadas por Folgueira *et al.* (1997a, 1997b). Los resultados de estos dos trabajos anexos: [Folgueira *et al.* 1997a], [Folgueira *et al.* 1997b] se expusieron en la XXIII Asamblea General de la IAU (21 de Agosto de 1997) y actualmente han sido aceptados para publicar en la revista *Celestial Mechanics*. En una carta particular enviada por el segundo autor que firma estos trabajos, Jean Souchay, se destaca y reconoce el importante trabajo de investigación realizado por Marta Folgueira en la elaboración de dichos artículos [Souchay 1997b].

El propósito principal de esta Memoria consiste en obtener las series teóricas y los coeficientes numéricos de nutación de una Tierra rígida bajo la influencia lunisolar, introduciendo unas nuevas variables en la expresión de la energía potencial gravitatoria debida al Sol y a la Luna. Este grupo de cinco variables, formado por las tres variables modificadas de Delaunay junto con la longitud media del Sol y la longitud del perigeo solar, describe perfectamente el movimiento perturbado de la Luna alrededor de la Tierra. Estas nuevas variables tienen algunas ventajas sobre las consideradas por Kinoshita (1977) y Kinoshita & Souchay (1990) que detallaremos a lo largo de este trabajo. Entre las principales mejoras respecto a los trabajos citados destacaremos:

- Se considera, en toda la Memoria, un único grupo de variables para la representación del movimiento perturbado de la Luna. Es decir, una vez definidas y elegidas estas cinco variables, cuya combinación lineal determinará los argumentos de los términos de nutación, se expresan todos los desarrollos en función de este grupo de variables y se mantiene

en todo el trabajo. Además, en dicho grupo de variables, están bien diferenciadas las variables propias de la Luna de las del Sol.

Sin embargo, Kinoshita & Souchay (1990) utilizan varios grupos de variables en la teoría de segundo orden de precesión-nutación de la Tierra rígida:

- Consideran el grupo $(l_L, l_\odot, F, D, \Omega)$ - ver Capítulo 2 - en la descripción del movimiento perturbado de la Luna, siendo D la diferencia entre una variable propia de la Luna y una variable propia del Sol.
- Los desarrollos de la energía potencial gravitatoria correspondiente al Sol están en función de la longitud del Sol. (En realidad utilizan también la longitud del perigeo solar, pero le asignan un valor constante) [Kinoshita & Souchay 1990a, p. 197].
- En la extensión de la teoría al segundo orden, concretamente en el estudio de los efectos de interacción entre el movimiento orbital de la Luna y el movimiento rotacional terrestre consideran doce variables canónicas: las seis variables de Andoyer correspondientes al movimiento de rotación de la Tierra y las seis variables de Delaunay, correspondientes al movimiento orbital lunar.

La razón de considerar conjuntamente estas doce variables está en que estos efectos se determinan a partir de los paréntesis de Poisson, en el método de integración de Hori. Para calcular dichos paréntesis es necesario que todas las variables sean canónicas, por lo tanto, Kinoshita & Souchay (1990) tuvieron que transformar los argumentos de los términos mayores (y con velocidades pequeñas) a las variables de Delaunay [Kinoshita & Souchay 1990a, p. 222-228]. En nuestro caso, nos evitaríamos hacer esta transformación puesto que las variables modificadas de Delaunay son canónicas e incluso están mejor definidas que las variables de Delaunay [Fukushima 1994].

Por tanto, simplificamos y homogeneizamos el problema al considerar un único grupo de variables, aplicable al estudio de todos los efectos considerados en la teoría Hamiltoniana de Rotación de una Tierra rígida.

- Las variables utilizadas conducen a expresiones de la nutación en longitud y oblicuidad similares a las de Kinoshita & Souchay (1990). En el caso concreto de la nutación en oblicuidad del ecuador momento angular, las expresiones se simplifican un poco puesto que aparecen multiplicadas por la suma de todos los coeficientes que multiplican a las cinco variables consideradas y esta suma, en un mismo desarrollo, es siempre igual a un valor fijo, facilitando la programación de las expresiones correspondientes.

También se han extendido algunos desarrollos de la teoría de Kinoshita & Souchay (1990) como la expresión de la energía potencial gravitatoria debida al armónico zonal de grado 3, J_3 , y las series de nutación en longitud y oblicuidad correspondientes. Con esta extensión se obtienen los términos Oppolzer relacionados con el armónico J_3 , no incluidos en la teoría de segundo orden.

Otra nueva e interesante aportación que también se ha llevado a cabo ha consistido en estudiar la influencia del cambio secular de la oblicuidad sobre los términos de nutación y obtener, mediante la formulación hamiltoniana, los coeficientes relacionados con dicha influencia.

Finalmente, hemos realizado la programación en MAPLE V-4 de las diversas fórmulas y procedimientos estudiados, obteniéndose mediante el ordenador Silicon Graphics de la Facultad de CC. Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, las tablas y valores numéricos que presentamos en el último Capítulo. Los resultados numéricos se han comparado con los obtenidos recientemente por Souchay *et al.* (1997) y Bretagnon (1997) basados en las mismas hipótesis pero que utilizan otras variables para el movimiento de la Luna y del Sol e incluso otros procedimientos diferentes como es el caso del último trabajo mencionado. La comparación se ha hecho con los términos de la nutación que provienen de la parte de la energía potencial gravitatoria lunisolar de segundo orden, obteniéndose pequeñas diferencias con respecto a los valores de Souchay *et al.* (1997) y Bretagnon (1997), lo que confirma la validez de los cálculos realizados, de nuestras series y posiblemente la mejora de las teorías existentes.

Este trabajo se desarrolla en cinco Capítulos que se pueden resumir como sigue:

CAPÍTULO 1: El estudio de la Rotación de la Tierra rígida desde la Antigüedad hasta el siglo XX.

En este Capítulo introductorio se definen los conceptos de precesión, nutación y movimiento del polo y se describe esquemáticamente el estudio de la Rotación terrestre desde la Antigüedad hasta nuestros días.

CAPÍTULO 2: Desarrollo del potencial lunisolar de primer orden.

Siguiendo la teoría desarrollada por Kinoshita (1977) y utilizando para el movimiento orbital perturbado de la Luna cinco variables distintas a las consideradas por él, se obtienen las energías potenciales lunar y solar al primer orden.

CAPÍTULO 3: Contribuciones al desarrollo del potencial lunisolar de primer orden.

Se estudian las aportaciones al potencial lunisolar de primer orden de los armónicos zonales y no-zonales de grado 3 y 4.

CAPÍTULO 4: Series solución del movimiento de Rotación de la Tierra rígida.

A partir de la nueva expresión de la energía potencial gravitatoria se obtienen las series de nutación utilizando el método de perturbación elaborado por Hori. Se estudian también, teóricamente, los efectos del cambio secular de la oblicuidad sobre los términos de nutación.

CAPÍTULO 5: Resultados numéricos de la nutación lunisolar en longitud y en oblicuidad

Se obtienen los valores numéricos de la nutación lunisolar correspondientes a la influencia de los armónicos zonales y no-zonales de grado 3 y 4 y se realiza la comparación con los resultados obtenidos por Souchay *et al.* (1997) y Bretagnon (1997). También se calculan los coeficientes de la nutación debidos a la introducción de la variación secular de la oblicuidad en nuestros cálculos.

Capítulo 1

El estudio de la Rotación de la Tierra rígida desde la Antigüedad hasta el siglo XX

1.1 Introducción.

El estudio de la rotación terrestre, junto con el de la revolución orbital de la Tierra, es uno de los problemas clásicos de la Mecánica Celeste. En realidad, estos dos movimientos terrestres son la base de las definiciones dinámicas de los sistemas de posición y tiempo. Pero aunque clásico este problema es actual, no sólo en los campos de la Astronomía y Geodesia sino en cualquiera de las ciencias de la Tierra tanto desde el punto de vista físico como matemático. El desarrollo histórico de la rotación de la Tierra no ha sido lineal. El camino seguido para llegar a las actuales teorías ha sido largo, tan largo, que debemos remontarnos a los filósofos y matemáticos griegos si queremos seguir su difícil y ardua trayectoria.

El propósito de este Capítulo es dar una visión histórica del estudio de la rotación de la Tierra, describiendo las principales teorías de los astrónomos y pensadores que han contribuido a lo largo de la Historia a este estudio, tanto directamente como aportando conclusiones de ciencias afines (Geodesia, Geofísica, etc.) necesarias para comprender su evolución. Para el resumen histórico de los principales estudios sobre rotación desde la Antigüedad hasta el siglo XIX, elaborado en las secciones 1.4 a 1.9, se han utilizado los siguientes textos relacionados con la Historia de la Astronomía: [Waterfield 1938], [Berry 1961], [Pannekoek 1961], [Boyer 1969], [López 1969], [Coulston 1970], [Mersman 1970], [Mersman 1971], [Ronan 1972], [Goldstein 1976], [Kuhn 1978], [Torroja 1980], [Torroja 1981], [Newton 1983], [Newton 1987a], [Newton 1987b], [Abbott 1984], [Mason 1985a], [Mason 1985b], [Mason 1986], [Ptolomeo 1987], [Taton & Wilson 1989], [Ekman 1991].

De forma breve y concisa hemos definido primeramente los conceptos de precesión, nutación y movimiento del polo y otros conceptos relacionados que van a aparecer continuamente a lo largo de este trabajo.

1.2 Precesión, Nutación y Movimiento del polo.

Las variaciones de un sistema de coordenadas fijo a la Tierra respecto a un sistema fijo en el espacio son debidas principalmente a los pares producidos por la atracción gravitacional de la Luna, y en menor grado a los del Sol y planetas, sobre el abultamiento ecuatorial terrestre y a mecanismos geofísicos o deformaciones de la Tierra [Seidelmann 1982].

El movimiento de largo periodo del eje de rotación de la Tierra respecto al eje que pasa por el polo de la eclíptica, debido al par lunisolar se conoce como *precesión lunisolar*. Los planetas afectan a la orientación del plano orbital medio de la Tierra, originando una lenta rotación de la eclíptica sobre un eje de rotación que se mueve lentamente, y esto se llama *precesión planetaria*. El resultado de esto es un movimiento del equinoccio y, en el presente, una disminución de la oblicuidad de la eclíptica. La combinación de estas dos precesiones es la *precesión general*.

El movimiento periódico del eje de rotación de la Tierra respecto al sistema de coordenadas fijo en el espacio se conoce como *nutación*. Incluye la *nutación forzada* que da cuenta del movimiento debido a todos los pares externos y la *nutación libre* que es la solución que resulta de hacer cero la función fuerza y puede ser excitada por procesos internos cuyas amplitudes pueden sólo determinarse por observación. La precesión y nutación cambian las coordenadas celestes observadas (ascensión recta y declinación).

El *movimiento del polo* se refiere al movimiento del mismo eje de rotación con respecto a la corteza de la Tierra.

1.3 Ejes de rotación, momento angular y de figura.

En este trabajo utilizaremos las siguientes definiciones [Seidelmann 1982]:

Un *eje* es una línea recta paralela a un vector asociado, que pasa por el centro de masas de la Tierra. El punto en que el eje corta a la superficie de la Tierra o a la esfera celeste es un *polo*; en el primer caso es un *polo terrestre* y en el segundo un *polo celeste*. Si no se dice explícitamente se entenderá polo terrestre. Se supone que la esfera celeste sirve para definir un sistema de coordenadas fijo en el espacio.

El *vector velocidad de rotación* $\vec{\omega}$ de un cuerpo rígido describe el movimiento de una partícula de vector de posición $\vec{P}(t)$ por:

$$\frac{d}{dt}\vec{P}(t) = \vec{\omega} \wedge \vec{P}(t) \quad (1.3.1)$$

Siguiendo a [Munk & MacDonald 1960], para un cuerpo no rígido podemos seleccionar un *vector velocidad angular instantáneo* como aquél que minimiza:

$$\int_V \left(\frac{d}{dt} \vec{P}(t) - \vec{\omega} \wedge \vec{P}(t) \right) dV \quad (1.3.2)$$

donde V representa el volumen de la Tierra o, más general, esa porción de Tierra cuya velocidad angular instantánea deseamos conocer.

El *eje instantáneo de rotación* R es una línea en dirección del vector velocidad angular instantáneo de la Tierra, que pasa por el centro de masas de la Tierra. La intersección de R con la superficie de la Tierra es el *polo instantáneo terrestre de rotación* PR_T . La intersección de R con la esfera celeste es el *polo instantáneo celeste de rotación* PR_C .

El *vector momento angular instantáneo* \vec{M} se define como el momento de la cantidad de movimiento respecto del centro de masas de la Tierra, viene expresado por [Lambeck 1980]:

$$\vec{M} = \int_M \vec{P}(t) \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{P}(t)) dM \quad (1.3.3)$$

la integral en (1.3.3) está extendida a toda la masa de la Tierra.

El *eje momento angular instantáneo* M es una recta en dirección del vector momento angular instantáneo de la Tierra que pasa por el centro de masas de la Tierra. La intersección de M con la superficie de la Tierra es el *polo momento angular instantáneo terrestre* PM_T . La intersección de M con la esfera celeste es el *polo momento angular instantáneo celeste* PM_C .

Los *ejes principales de inercia* de un cuerpo son líneas ortogonales que definen un sistema de coordenadas cartesianas en el cual el tensor de inercia es diagonal, es decir, los ejes principales en dirección de los autovectores del tensor de inercia. Para un elipsoide de revolución rígido, los momentos principales de inercia son iguales sobre dos de los ejes principales y mayor sobre el tercero. Este último es el *eje de figura*. La Tierra se parece imperfectamente a un elipsoide de revolución y, además, es deformable. Así su tensor de inercia, y las direcciones de los ejes principales, son funciones del tiempo. No obstante, el *eje instantáneo de figura* F puede definirse como la línea que pasando por el centro de masas de la Tierra tiene la dirección del autovector primario del tensor de inercia instantáneo de la Tierra. La intersección de F con la superficie de la Tierra es el *polo instantáneo de figura* PF_T . La intersección de F con la esfera celeste será PF_C .

El eje instantáneo de figura de una Tierra deformable está sujeto a movimientos debidos a distorsiones de la Tierra tales como las causadas por las mareas del cuerpo. Este efecto hace difícil interpretar los movimientos del eje F anterior en términos de conceptos intuitivos del cuerpo rígido. Entonces, resulta útil definir el *eje medio geográfico de superficie* B como un eje ligado a la superficie exterior de la Tierra en un sentido de mínimos cuadrados. Consideremos una red de observatorios sobre una Tierra rígida y un eje fijo con respecto a la posición de los observatorios. El único movimiento posible de la red de observatorios es una rotación rígida, posiblemente dependiente del tiempo; la porción de rotación rígida que no es paralela al eje

producirá un movimiento del eje como resultante del movimiento de los observatorios que la definen. Sobre un planeta deformable existirá la posibilidad de otros movimientos de los observatorios y generalizaremos la definición del eje tal que se defina en el sentido de mínimos cuadrados por las posiciones de los observatorios. El eje B es exactamente este eje en el caso límite de un número infinito de observatorios uniformemente distribuidos. Entonces, si descomponemos el movimiento de la superficie de la Tierra en una rotación media rígida más una deformación residual, B se mueve en el sentido prescrito por la rotación media. El eje B no responde a las mareas del cuerpo. La intersección de B con la superficie de la Tierra se designa por PB_T y la intersección con la esfera celeste por PB_C . Obsérvese que para una Tierra rígida B coincide con F y PB con PF para cualquier tiempo. No hay movimiento periódico que no sea de marea de los observatorios sobre la superficie de la Tierra respecto a PB_T . Puede haber movimientos de los observatorios con respecto a PB_T originados por movimientos de la corteza que no han sido todavía modelados adecuadamente y por otros tipos de fuerzas internas.

Las orientaciones de todos los ejes están en general, cambiando continuamente. Si deseamos calcular el movimiento de uno de estos ejes debemos considerar la solución completa de las ecuaciones diferenciales, esto es, la solución libre más la solución forzada. La solución forzada es la solución de las ecuaciones de rotación que tiene en cuenta todas las fuerzas externas (fuerzas gravitacionales debidas al Sol, Luna y planetas). La solución libre es la solución de las ecuaciones de rotación que resultan de igualar a cero la función fuerza (es la solución particular de las ecuaciones del movimiento) [Seidelmann 1982].

Nota: A lo largo de este trabajo se considerarán los planos perpendiculares a los ejes de rotación, momento angular y de figura pasando por el centro de masas a la Tierra.

1.4 Orígenes del estudio de la Rotación de la Tierra. Período griego.

Los primeros estudios sobre la rotación terrestre datan del siglo VII a.d.C., *Tales de Mileto* (≈ 640 a.d.C) fue el primero que se ocupó de buscar una explicación a la constitución y movimientos del sistema del Mundo. Algunos de los antiguos historiadores griegos afirmaron de Tales que consideraba la Tierra esférica, mientras que para otros defendía que no era sino un disco plano circular flotando sobre el océano. Manejó también los planos de la eclíptica y del ecuador.

Anaximandro (610-545 a.d.C) discípulo de Tales, parece que fue el primero que determinó la oblicuidad de la eclíptica. No se tiene seguridad en cuanto a sus ideas sobre la forma de la Tierra, pues según unos, la consideraba esférica girando alrededor de un eje y según otros, cilíndrica, siendo la altura de este cilindro el triple del diámetro de la base.

Pitágoras (570-472 a.d.C) discípulo también de Tales, consideraba la Tierra esférica, inmóvil en el centro del mundo. El movimiento diurno, como ya se admitía anteriormente a él, es debido

a la rotación de la esfera celeste. Las ideas de Pitágoras tuvieron una importante influencia en la Astronomía antigua y medieval. No solamente las estrellas fijas a una esfera de cristal giraban diariamente alrededor de un eje que pasaba a través de la Tierra, sino que cada uno de los siete planetas (incluidos también el Sol y la Luna) se movía en su propia esfera. Las distancias de estas esferas a la Tierra eran fijas de acuerdo con ciertas nociones especulativas de Pitágoras como los números y la música; de ahí que cuando las esferas giraban producían sonidos armoniosos: este es el origen de la "Música de las esferas".

Hicetas (s. V a.d.C), sin embargo, ya sostenía la idea de la rotación de la Tierra alrededor de un eje ligado a ella. Por otro lado, *Filolao* (segunda mitad del s. V a.d.C) imaginó un mundo en el que Dios había colocado un gran fuego en el centro del Universo, fuego que era la sede de la divinidad y principio de todos los movimientos celestes. Suponía que la Tierra giraba de occidente a oriente alrededor del fuego central, explicando el movimiento diurno sin necesidad de recurrir al movimiento de rotación de la esfera de estrellas. Pero, en este movimiento, la Tierra dirige siempre la misma cara hacia el fuego, que es precisamente la región de las antípodas de la parte habitada (lo que llamó la anti-Tierra), por lo cual el hombre nunca puede ver ese fuego. La sucesión de los días y las noches era debida a la variación de las posiciones relativas del Sol (que afirmaba que no era luminoso por sí mismo sino que era una masa transparente iluminada por el fuego superior -fuego situado en los límites del Universo-) y de la Tierra alrededor del fuego central. Esta idea fue abandonada en el siglo siguiente. *Empédocles* (484-424 a.d.C) sostenía también unos puntos de vista astronómicos muy primitivos. Explicó el día y la noche suponiendo que un hemisferio brillante y otro oscuro rotaban alrededor de la Tierra.

En el siglo IV a.d.C, *Ecphantos* apoyó las ideas de *Hicetas*. *Platón* (428-347 a.d.C) adoptó al final de su vida la creencia de la rotación de la Tierra y que el centro del universo no estaba ocupado por la Tierra sino por otro cuerpo mejor ("El *Timaeus*").

Aristóteles (384-322 a.d.C) también aportó nuevas ideas. Sus principales escritos sobre cosmología y astronomía están recopilados en el cuarto volumen del "De caelo". Sostenía la idea de que el Universo no podía ser infinito ya que, según su punto de vista, adoptado a partir de los trabajos de *Eudoxio* (408-355 a.d.C) y de *Calipo* (370-300 a.d.C), el Universo consistía en una serie de esferas concéntricas, en las cuales estaban las estrellas fijas, que rotaban alrededor de una Tierra central y estacionaria. Aristóteles también demostró la esfericidad terrestre observando la sombra circular que la Tierra proyectaba sobre la Luna durante un eclipse. Mas tarde, *Eratóstenes* (275-194 a.d.C) en su trabajo "Sobre la medida de la Tierra" realizó la primera determinación del radio de la Tierra.

Aristóteles no admitió el movimiento de rotación de la Tierra, incluso demostró que esto era imposible confirmando también sus argumentos con la observación: si lanzamos una piedra hacia arriba, la piedra caerá siempre sobre el mismo punto desde que se lanzó, cosa que no ocurriría si la Tierra girase.

Heráclides de Ponto (388-315 a.d.C) rechazó el modelo de Universo de Aristóteles. Heráclides

pensó que era prácticamente imposible que las inmensas esferas de estrellas y planetas rotaran una vez en 24 horas y sostenía que era la Tierra la que giraba alrededor de su eje, de oeste a este, una vez cada 24 horas. También pensó, a partir de los movimientos observados de Mercurio y Venus, que estos parecían orbitar alrededor del Sol. Sin embargo, no adoptó completamente un modelo heliocéntrico. El propuso que el Sol se movía en una órbita circular y que Mercurio y Venus se movían en epiciclos alrededor del Sol como centro.

Aristarco de Samos (≈ 320 -250 a.d.C), en su trabajo "Sobre la magnitud y distancias del Sol y de la Tierra" establece la primera teoría heliocéntrica del Universo, describiendo el Sol y las estrellas fijas como estacionarios en el cosmos, y los planetas, incluida la Tierra, viajando en órbitas circulares alrededor del Sol. Además, afirmó que la rotación aparente diurna de la esfera de estrellas era debida a la rotación terrestre alrededor de su eje cuando la Tierra viaja alrededor de su órbita. No obstante, su teoría causó poco impacto entre sus contemporáneos debido principalmente a que las ideas filosóficas, religiosas y astronómicas estaban basadas en modelos geocéntricos del Universo. El modelo propuesto por Aristarco demandaba unas dimensiones del Universo que excedían de la imaginación de los cosmólogos contemporáneos a él y no fueron aceptadas. Aristarco propuso un modelo cosmológico basado, no en la armonía matemática sino en la realidad física observada. *Seleucus de Seleucia* (s.II a.d.C) sostuvo una opinión similar. *Arquímedes* (287-212 a.d.C) aceptó también el sistema del mundo de Aristarco que transcribió en su "Arenario".

Apolonio de Rodas (≈ 220 a.d.C) introduce la idea de los epiciclos y deferentes para explicar el movimiento de los cuerpos celestes. Para explicar el movimiento diurno, tanto en las estrellas como en los planetas, afirmaba que los deferentes de estos son arrastrados por la rotación de la esfera de estrellas fijas de este a oeste, con un período de 23^h56^m .

En el siglo siguiente, *Hiparco* (180-120 a.d.C) descubrió el fenómeno de la precesión. Comparando las coordenadas de estrellas calculadas por él con las determinadas un siglo y medio antes, Hiparco observó un decrecimiento sistemático de las longitudes eclípticas de las estrellas. Interpretó esta variación como un movimiento continuo de los equinoccios a lo largo de la eclíptica. Su descubrimiento fue publicado en el 125 a.d.C con el título "Sobre el desplazamiento de los puntos solsticiales y equinocciales". En este trabajo calculó la constante de precesión anual ($49''$ /año). También determinó la duración del año terrestre ($365 \frac{1}{4}$ días) y el período lunar ($29^d12^h44^m2^s.25$). No pudo apreciar variación alguna en la oblicuidad de la eclíptica.

Claudio Ptolomeo (100-174 d.d.C) escribió, entre otras obras, "La gran composición matemática de la Astronomía o sintaxis matemática" conocida universalmente con el nombre de *Almagesto* (150 d.d.C). En esta obra Ptolomeo supo abarcar los conocimientos astronómicos de su época presentándolos de una forma ordenada.

El *Almagesto* consta de 13 libros, en el primero de los cuales admite que el cielo y la Tierra son esféricos. Sitúa a ésta en el centro del cielo y afirma que no puede experimentar ningún movimiento que la desplace del centro. No admite la rotación de la Tierra para tratar de

explicar el movimiento diurno y esgrime también el mismo argumento de Aristóteles. Sin embargo, reconoce que, de admitirse este movimiento de rotación de la Tierra, se encontraría una explicación más sencilla a los fenómenos observados. En el libro II da los procedimientos para determinar el valor de la oblicuidad de la eclíptica y la latitud del lugar.

En los libros VII y VIII da un catálogo con las longitudes, latitudes y magnitudes de 1022 estrellas de la lista de Hiparco. Dedicó también un capítulo a la precesión pero no acepta el punto de vista de Hiparco. Ptolomeo estaba convencido de que la precesión era debida a la rotación uniforme hacia el este de la esfera de estrellas fijas respecto a la eclíptica. La constante de precesión que él obtuvo era de $36''/\text{año}$.

San Agustín (354-430) admite que la Tierra es esférica, pero pone en duda la existencia de las antípodas. *Aryabhata I* (s.V d.d.C), en contraste con los astrónomos indios, supuso la rotación diurna de la Tierra alrededor de su eje. *Cosmas Indicopleustes* (s.VI d.d.C) escribió una "Topografía cristiana" en la que expone una teoría sobre el sistema del Mundo. Afirmaba que la Tierra es plana y rectangular, dos veces más larga que ancha, limitada por grandes paredes verticales cerradas por una bóveda cilíndrica, rodeada por agua por todas partes. Los astros se mueven empujados por los ángeles, provocando así la sucesión de los días y las noches. Con este sistema pretendía sustituir al de Ptolomeo, cuya obra rebatió.

Paralelamente al estudio de la rotación terrestre empezaron los primeros descubrimientos en el estudio de las mareas. En el siglo III a.d.C, *Antígono de Caristia* y *Eratóstenes* buscaron, por vez primera, en el movimiento de la Luna la justificación de las mareas oceánicas. También, *Phyteas*, en su trabajo "Sobre el océano" (330 a.d.C) llegó a la misma conclusión y observó que la amplitud de las mareas dependía de las fases de la Luna. *Seleukos* descubrió lo que hoy se conoce como desigualdad diurna (150 a.d.C). *Poseidonios* (135-50 a.d.C) fue el primero en distinguir los tres períodos de las mareas (semidiurno, semimensual y semianual). Sin embargo, dio una explicación primitiva de la teoría de mareas partiendo de la teoría de la simpatía universal que él defendía. *Plinio el Viejo* (23-79 d.d.C) en su trabajo "Historia natural" (77 d.d.C) resume los conocimientos de las mareas de su tiempo.

San Isidoro de Sevilla (560-636) escribió varias obras, entre ellas "Etimologías" y "De rerum natura". Sostenía que el cielo es una esfera que gira alrededor de un eje que pasa por la Tierra. Estudió también las mareas afirmando que estaban producidas por la Luna pero muy perturbadas por las corrientes submarinas. Su obra contribuyó a conservar la ciencia clásica. En el comienzo del siglo VIII, *Beda el Venerable* (673-735) descubre el retraso en fase de las mareas y llegó a la conclusión de que la predicción de la marea debía hacerse localmente. En su obra "De rerum natura" explica que la Tierra es una esfera y que está rodeada por las esferas de aire, éter, el olimpo, la esfera del fuego, la de los cuerpos celestes, el cielo de los ángeles y la Trinidad. La esfera de los cuerpos celestes gira alrededor de la Tierra y en ella se mueven los planetas en epiciclos y deferentes.

1.5 Período árabe.

El legado de la astronomía griega pasó en los siglos IX al XV a manos de los árabes principalmente. Durante estos siglos, numerosos científicos del mundo islámico aportaron nuevas ideas al estudio de la rotación terrestre y de las mareas.

En el siglo IX, *Thabit ibn Qurra* (836-901) estudió el *Almagesto* y, viendo los valores obtenidos de la constante de precesión hasta entonces, llegó a la conclusión de que tal constante no era constante. De esta forma introdujo la idea, bastante extendida posteriormente, de la *trepidación* o movimiento oscilatorio de los puntos equinociales, que hace que la precesión sea una función complicada del tiempo. La trepidación fue también conocida en Europa como *movimiento de la octava esfera* en contraposición con el *movimiento de la novena esfera* correspondiente a la precesión de Ptolomeo.

La idea de la trepidación fue ampliamente aceptada. Hubo, sin embargo, algunos científicos que expresaron sus dudas, entre ellos, *Mohammed Al-Battini (Albategnius)* (850-929) que, en su trabajo "Opus astronomicum", hizo una redeterminación de la constante de precesión (54"/año). *Al-Fargānī* (s. IX) escribió un libro "Sobre los movimientos celestes" en el que resume las teorías de Ptolomeo. *Albumasar* (787-886) en su trabajo "Introductionum in astronomiam" incluye una teoría de las mareas. *Al-Biruni* (973-1050), en su colección astronómica "Qanun al-Mas'udi" trata los principales problemas de la astronomía. En particular destaca por sus contribuciones a la trigonometría, su nuevo método sobre la medida de la Tierra y su discusión (no muy acertada) sobre los movimientos de traslación y rotación terrestre en el que alega una serie de razones en contra de ambos: si damos un salto hacia el este o hacia el oeste, y la Tierra girase, el impulso dado a nuestro cuerpo se sumaría o restaría al debido a la rotación terrestre, lo que debería notarse en la longitud recorrida al saltar en una u otra dirección. Y como esto no ocurre, se puede afirmar que la Tierra no gira.

Ibn Sīnā (Avicena) (980-1037) admite la existencia real de las esferas de Aristóteles como seres vivos, dotados de un alma que les permite moverse por su propia voluntad: '*Todos los seres creados proceden del flujo creador según un orden y una jerarquía*'. Avicena sitúa las estrellas en 2 esferas distintas. Su hipótesis fue comentada por *Fajr al-Dīn al-Rāzī*, quien dice: '*Es imposible afirmar la unidad de la esfera del movimiento diurno. Es posible que se trate de múltiples esferas cuyos movimientos difieren en una cantidad mínima que no pueden determinarse en el curso de nuestra vida*'.

En cuanto a los movimientos de los astros en estas esferas admite Avicena tres posibilidades: que sean las esferas que se muevan quedando los astros fijos en ellas; que estén fijas las esferas, y los astros se muevan sobre ellas, o una combinación de ambos movimientos.

La obra de Avicena influyó poderosamente en las opiniones de los astrónomos posteriores, en especial entre los hispano-árabes.

Una aportación interesante fue la de *Ibn al-Haytam (Alhacén)* (965-1039) que en sus obras tituladas "Resumen de Astronomía" y "La forma del universo" afirmaba que la Tierra es esférica e inmóvil y que está situada en el centro del Universo, rodeada de agua, aire y fuego. El mundo está limitado por una esfera que él llama esfera Suprema. Debajo de ella se encuentra la esfera de estrellas fijas que gira alrededor del eje del mundo, de oriente a occidente.

En el siglo XI se inicia la decadencia de la Astronomía y, en general, de toda la ciencia árabe en el Oriente Medio. Esta decadencia coincide con el nacimiento de un importante movimiento científico en España, donde a partir de este siglo, se inicia en el al-Andalus, concretamente alrededor del califato de Córdoba, un floreciente desarrollo de la ciencia.

A principios del siglo XI, *Ibn Yunus* obtiene como valor de la constante de precesión $51''/\text{año}$. *Azarquiel* (1029-1100) en su obra "Tratado sobre el movimiento de las estrellas fijas" estudió el movimiento de precesión de los equinoccios, que fijó en $46''/\text{año}$ y el de la oblicuidad de la eclíptica variando entre $23^{\circ}33'$ y $23^{\circ}53'$. Para explicar las variaciones en la precesión y en la oblicuidad de la eclíptica modificó la teoría de la trepidación de Thabit ibn Qurra. En el siglo XII, *Johannes Hispalensis (Averroes)* (1135-1153) escribió un corto tratado astronómico sobre la teoría de la precesión. *Ibn Rušd (Averroes)* (1120-1198) rechazó la teoría de la trepidación.

Abū Ishāq al-Bitrūḡī (Alpetragio) (segunda mitad del siglo XII) escribió varias obras dedicadas al estudio de la Astronomía, entre ellas "Teoría planetaria" y "De la esfera celeste". Suponía que el centro del Mundo está rodeado por los cuatro elementos: tierra, agua, aire y fuego y éstos a su vez están rodeados por 9 esferas concéntricas con el centro del Mundo. Las esferas poseen un alma que las mueve. Desde la esfera exterior a la interior la perfección va decreciendo, tanto en lo que se refiere al alma como al cuerpo.

La novena esfera no contiene ningún astro, se mueve por sí misma con un movimiento de rotación, de oriente a occidente, alrededor de un eje cuyos polos son los del Universo. En la octava esfera están situadas las estrellas fijas y en las siete restantes los planetas, correspondiendo la séptima esfera al planeta más alejado de la Tierra que se conocía, es decir, Saturno. La esfera de estrellas fijas tiene un movimiento de rotación de oriente a occidente alrededor del eje del Mundo, pero un poco más lento que el de la novena debido a la imperfección. La diferencia de la velocidad es tal que al cabo de 36000 años, la octava esfera habrá perdido una rotación completa con relación a la novena. Explicando así el fenómeno de precesión.

Alpetragio afirmaba también que a la Tierra, dada su distancia a la novena esfera, no le llega en absoluto la fuerza motriz de aquélla, por lo que permanece inmóvil, sin rotación. Las ideas de Alpetragio fueron muy bien recibidas por los pensadores que se oponían a las ideas de Ptolomeo. Su obra tuvo influencia hasta el siglo XVI.

La aportación de *Alfonso X el Sabio* (1226-1284) al desarrollo de la Astronomía está comprendida en dos obras: "Los libros del saber de Astronomía" y "Las tablas alfonsíes" (1272). Reunió a un equipo de eruditos judíos, cristianos y árabes para colaborar con él en estas dos

grandes obras. Los astrónomos de Alfonso X aceptaron la precesión de Ptolomeo y la trepidación de Azarquiel y mantenían la idea de que el movimiento diurno era debido a la rotación de la esfera de estrellas fijas de oriente a occidente.

A principios del siglo XIV se vuelve a cuestionar la veracidad de la teoría de la trepidación. Así, *Levi ben Gerson* (1288-1344) aseguró que la oblicuidad de la eclíptica no había variado desde la Antigüedad y que su valor había sido siempre $23^{\circ}33'$. Análogamente, argumentó que la velocidad de precesión no había cambiado y que no había razón alguna para introducir la teoría de la trepidación.

En cuanto al estudio de las mareas durante estos siglos, conviene destacar a *Zakariya Al-Qazwini* (1203-1283) que fue el primer científico que trató de explicar el origen de las mareas. En su libro sobre los interrogantes de la creación sostenía que la marea estaba causada por el Sol y la Luna que calentaban las aguas y por lo tanto hacían que éstas se expandieran.

1.6 Siglos XIV al XVI.

Excluyendo la labor realizada por Alfonso X el Sabio, en Occidente no se registró apenas ningún desarrollo de la Astronomía hasta el siglo XIV, y durante bastante tiempo se vuelve incluso a pensar que la Tierra es un disco.

Nicole de Oresme (1320-1382), en su libro "Livre du ciel et du monde" (1377), afirmó que la atmósfera tomaba también parte en la rotación de la Tierra. *Nicolás de Cusa* (1401-1464) pensó que la Tierra no podía hallarse en reposo y que el Universo no podía concebirse como finito; el mundo, según él, sería como un símil matemático para expresar la omnipotencia de Dios.

Nicolás Copérnico (1473-1543) afirma, en su libro "De revolutionibus orbium caelestium" (1543), que el modelo planetario geocéntrico establecido por Ptolomeo era complejo e impreciso. Copérnico propone reemplazar las ideas de Ptolomeo por un modelo en el cuál los planetas -incluyendo la Tierra- orbitaran alrededor del Sol situado en el centro. La Tierra describiría una órbita completa alrededor del Sol en un año, mientras que la Luna orbitaría alrededor de la Tierra. Así mismo, afirmó que la Tierra rotaba diariamente alrededor de su eje (que estaba inclinado $23^{\circ}.5$ del plano de la órbita) lo que explicaba la rotación aparente diurna de la esfera de estrellas fijas.

Copérnico también propone en su libro que la atmósfera, o al menos parte de ella, rotaba con la Tierra. Dedicó también algunos capítulos a la teoría lunar. La estructura general del modelo y los parámetros geométricos son los mismos que los utilizados por *Ibn ash-Shatir* (1304-1376) un siglo antes.

Los argumentos que empleaba Copérnico para sostener su teoría eran fundamentalmente de naturaleza matemática. Consideraba que una teoría científica era un grupo de ideas deduci-

das de determinadas suposiciones o proposiciones. Las suposiciones verdaderas, sostenía, han de realizar dos cosas. En primer lugar, han de *salvar las apariencias* esto es, dar cuenta de los movimientos observados de los cuerpos celestes. En segundo lugar, no han de contradecir los conceptos básicos pitagóricos según los cuales los movimientos de los cuerpos celestes son circulares y uniformes. En opinión de Copérnico, un supuesto que no concordase con las observaciones poseía un defecto no menos grave que aquel que discrepase del concepto básico de que los movimientos de los cuerpos celestes son circulares y uniformes [Kuhn 1978].

Copérnico consideraba que el sistema ptolemaico no era *suficientemente absoluto*, ni *suficientemente aceptable para el entendimiento*, dado que Ptolomeo había abandonado la estricta observancia de los conceptos básicos pitagóricos. Al suponer que la Tierra rotaba sobre su eje diariamente y que se movía en torno al Sol por una órbita anual, Copérnico redujo, de este modo, el número de círculos precisos para explicar los movimientos aparentes de los cielos, pasando de los aproximadamente ochenta utilizados en las versiones elaboradas del sistema ptolemaico a cuarenta y ocho.

A pesar de que el sistema copernicano era más simple y elegante que el sistema ptolemaico, hubo objeciones físicas a este sistema. La más seria fue la objeción de que, en caso de que la Tierra rotase, el aire tendería a quedarse atrás, produciendo un constante viento del este. Copérnico ofreció dos respuestas. La primera consistía en un tipo de explicación medieval, según la cual el aire rota con la Tierra por contener partículas terrosas que poseen la misma naturaleza que la Tierra, impulsando así al aire para que se mueva con la Tierra. Su segunda explicación es más moderna: el aire rota *sin resistencia*, dado que el aire se halla *contiguo a la Tierra en rotación constante*. Una objeción similar señalaba que una piedra arrojada al aire hacia arriba habría de quedar retrasada debido a la rotación de la Tierra, cayendo al oeste del punto de proyección. A esta objeción Copérnico afirmó que *puesto que los objetos oprimidos por su peso son fundamentalmente térreos, no cabe duda de que las partes mantienen la misma naturaleza que su todo por lo que rotan con la Tierra*.

Una ulterior objeción consistía en señalar que si la Tierra rotase, se desharía en pedazos por la fuerza centrífuga. Copérnico respondía que si la Tierra no rotase, entonces habría de hacerlo la inmensamente mayor esfera de las estrellas fijas con una velocidad muy grande, por lo que sería mucho más susceptible de fragmentación debido a la fuerza centrífuga. Este argumento no era realmente concluyente en la época, ya que se pensaba que los cielos estaban compuestos del perfecto y sin peso quinto elemento, la *quintaesencia*, que no estaba influenciado por acciones terrestres del tipo de la fuerza centrífuga. No obstante, la idea aristotélica original de la quintaesencia se había tornado un tanto grosera durante la Edad Media, considerándose las esferas celestes como algo rígido, vítreo o cristalino, lo que apoyaba el argumento de Copérnico. También hallaba otra salida a la dificultad sugiriendo que la fuerza centrífuga tan sólo se daba en los movimientos violentos y no naturales o artificiales, y no en los naturales como los de la Tierra y los cuerpos celestes. Argumentaba que,

"Las cosas regidas por la naturaleza producen efectos contrarios a los de las regidas por la

violencia. Las cosas en las que se imprime fuerza e ímpetus han de disolverse, no pudiendo subsistir durante mucho tiempo; mas lo que hace la naturaleza es que se ordena correctamente y preserva su óptima composición. Así pues, hierra Ptolomeo al temer que la Tierra y las cosas terrestres se puedan dispersar por la rotación producida por la acción de la naturaleza”.

En la segunda mitad del siglo XVI, *Tycho Brahe* (1546-1601) llega a la conclusión de que la trepidación no existía (1588). También, en 1557, *Julius Caesar Scaliger* (1484-1558) expone nuevas hipótesis sobre el origen de las mareas.

España acogió las ideas renovadoras heliocéntricas de Copérnico frente a la hostil acogida en el resto de Europa. Los científicos españoles que aceptaron la teoría copernicana fueron *Diego Pérez de Mesa*, *Simón Pérez Abril*, *Francisco Suárez Argüello* y *Andrés García Céspedes*.

Sin embargo, a partir del último tercio del siglo XVI y como consecuencia del predominio del *escolasticismo contrarreformista* se produce un retroceso en el desarrollo de la crítica de los esquemas tradicionales. Se vuelve incluso a aceptar las teorías aristotélicas y a los astrónomos españoles se les prohibió adherirse a la doctrina heliocéntrica, condenada por la Sagrada Congregación del Índice. En esta época se produce un aislamiento ideológico de nuestro país y Felipe II prohíbe a los españoles estudiar y enseñar en otros países.

1.7 Siglo XVII.

En 1609, *Johannes Kepler* (1571-1630) explica en su trabajo "Astronomía nova" que las mareas se producían por una fuerza, de naturaleza magnética, atractiva del Sol y la Luna.

Sin embargo, *Galileo Galilei* (1564-1642) defendió la idea de Copérnico que afirmaba que las mareas estaban producidas por el efecto combinado de la rotación de la Tierra alrededor de su eje y su movimiento orbital alrededor del Sol.

René Descartes (1596-1650) dio una nueva explicación sobre el origen lunar de las mareas (1655). El sostenía la idea de que la Luna y la Tierra estaban rodeadas por un gran torbellino. La presión ejercida por el torbellino de la Luna en el de la Tierra se transmitía bajo la superficie de la Tierra dando lugar a las mareas. En 1666, *John Wallis* (1616-1703) dio una nueva versión extendida de la teoría de Galileo, incluyendo en la teoría la influencia de la Luna.

En 1687, *Isaac Newton* (1642-1727) publica "Philosophiae naturalis principia mathematica" que contiene, entre otras cosas, la ley de la Gravitación Universal. Con esta ley, Newton pudo explicar el origen de las mareas. El afirmó que las mareas estaban creadas por la atracción del Sol y la Luna siendo diferentes a distintas distancias de los cuerpos celestes. Con su teoría pudo explicar las tres propiedades fundamentales de las mareas: el período principal de 12 horas, la dependencia de la amplitud con las fases lunares y la desigualdad diurna.

Newton afirmó que la precesión estaba originada por las fuerzas gravitacionales de la Luna y del Sol en combinación con la deformación de la Tierra. También pensó que la Tierra debería estar achatada por los polos como consecuencia de su rotación y que sobre un planeta esférico no podría existir nunca el fenómeno de la precesión. Realizó también un cálculo teórico de la constante de precesión ($41''$ para la precesión lunar y $9''$ para la precesión solar) y del aplastamiento terrestre ($1/231$).

En este siglo, en España, se toma conciencia del aislamiento ideológico. Aunque es en las dos últimas décadas del siglo XVII cuando se rompe abiertamente con la autoridad de los clásicos y con los principios del saber tradicional, la asimilación sistemática de la ciencia moderna aparece ya en las obras de algunas figuras del período central del siglo, como los físicos, astrónomos y matemáticos *Juan Caramuel* y *José Zaragoza*.

1.8 Siglo XVIII.

Los científicos ingleses en este siglo aceptaron en general la teoría newtoniana, siendo enseñada en Cambridge por el sucesor de Newton, *William Whiston*, y, en Edimburgo, por *David Gregory*. Sin embargo, en el continente la aceptación de las ideas de Newton fue mucho más lenta, levantando polémicas en la Academia de Ciencias de París durante los años treinta, ya que se enfrentaba a la vigorosa oposición de los directores del observatorio parisino, la familia *Cassini*. El primer francés de la época que se declaró abiertamente newtoniano fue *Pierre Louis Moreau Maupertuis* (1698-1759). Sin duda, la notoriedad pública que alcanzó Maupertuis en Francia durante la cuarta y quinta décadas del siglo XVIII, fue debida al hecho de haber sido el defensor del newtonismo en la Academia de Ciencias de París. Todo ello tiene una historia cuyo antecedente inmediato es la polémica en torno a la figura de la Tierra.

Un expedición francesa a Cayena en 1673, había hallado que la longitud del péndulo que bate segundos en las proximidades del ecuador era más corta que la del péndulo que bate segundos en París. Newton había interpretado esto en el sentido de que la fuerza de la gravedad era menor en el ecuador que en los polos, afirmando que la Tierra era un esferoide oblongo, achatado por los polos y ensanchado en el ecuador (*Principia*, III, 18-20). Sugería que dicha forma era un resultado de la rotación de la Tierra en torno a su eje cuando estaba en un estado de plasticidad. Esta idea fue apoyada también por *Huygens* en el "Discours sur la cause de la pensanteur" (1690). En la década de los treinta del siglo XVIII, cuando la filosofía natural de Newton llegó a Francia, el segundo de los Cassini, Jacques (1677-1756) se opuso a esta teoría de la forma de la Tierra. A partir de las longitudes de un grado de latitud que se habían medido en Dunquerque en el norte y Perpignan en el sur de Francia, Cassini mantenía por el contrario que la Tierra se ensanchaba por los polos y se achataba por el ecuador. Unas mediciones posteriores de dos arcos de meridiano, uno cerca del polo y otro cerca del ecuador confirmaron los resultados teóricos de Newton.

Por otra parte, el astrónomo inglés *James Bradley* (1693-1762) fue quien explicó en este siglo la nutación principal de la Tierra (1748). *John Machin* (1680-1751) le sugirió a Bradley

un método geométrico para describir la nutación. El polo verdadero del ecuador celeste se mueve en un pequeño círculo, el círculo de nutación con un período igual al de los nodos de la órbita de la Luna, 18.6 años, alrededor del polo medio. Este polo medio se mueve a lo largo de un círculo de precesión con un período de 25800 años alrededor del polo de la eclíptica.

En 1749, *Jean le Rond D'Alembert* (1717-1783) presenta su trabajo "Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la Terre" que contiene la teoría matemática de la precesión y de la nutación. En particular, D'Alembert mostró que el círculo de nutación debería reemplazarse por una elipse de nutación con el eje mayor dirigido hacia el polo de la eclíptica.

En el mismo año que D'Alembert presentó su trabajo, *Leonhard Euler* (1707-1783) llega también a los mismos resultados. Además, Euler encontró un término de nutación que dependía del Sol, con un período de 1/2 año. Esta nutación ya había sido mencionada por Newton.

En 1758, Euler publica "Sobre el movimiento de rotación de los cuerpos sólidos alrededor de un eje variable". En este trabajo obtiene las ecuaciones para la rotación de cuerpos rígidos conocidas como ecuaciones de Euler. Una consecuencia importante de estas ecuaciones fue el descubrimiento del movimiento del polo.

Guiseppe Lodovico Lagrange (1736-1836) presenta en su libro "Mechanique analytique" (1788) un método elegante en el que se deducen las ecuaciones del movimiento de un cuerpo en rotación.

En el estudio de las mareas, *Daniel Bernoulli* (1700-1782) escribió un trabajo sobre las mareas basado en la teoría de Newton (1740) aunque no presentó un gran avance. Bernoulli se dio cuenta que Newton había sobreestimado la razón entre las mareas lunares y solares y dio un valor más próximo al valor actual (2.5).

En 1754, *Immanuel Kant* (1724-1804) escribió un artículo titulado "Ob die erde in ihrer umdrehung um die achse einige veränderung erlitten habe" en el que afirma que la fricción causada por la marea podría originar un retardo pronunciado de la rotación de la Tierra.

En 1799, *Pierre de Laplace* (1749-1827) publica el primero de los dieciséis volúmenes de su "Traité de mécanique céleste". En él desarrolla la teoría matemática de mareas y encuentra la fórmula conocida como fórmula de Laplace para el potencial de marea en función de la latitud, declinación y ángulo horario. En este mismo trabajo, Laplace elabora un nuevo tratamiento de la teoría de precesión-nutación aplicando las ecuaciones de Euler. Además muestra la posibilidad de expresar la precesión-nutación como serie de armónicos.

Laplace estudió la posibilidad de que la duración del movimiento de rotación de la Tierra podía ser alterada por causas interiores, tales como los temblores de Tierra y los volcanes. Su resultado fue negativo. Dedicó también un capítulo al examen de las fluctuaciones que la fuerza

atractiva de la Luna puede tener en nuestra atmósfera.

1.9 Siglo XIX.

Durante este siglo, se dio una especial importancia a la posible relación entre la precesión y la Edad de Hielo. Así, en 1842, *Joseph Adhémar* (1797-1862) afirmó en su libro "Révolutions de la mer" que la precesión era la causante de repetidas glaciaciones, alternativamente en los hemisferios norte y sur.

En 1875, *James Croll* (1821-1890) dio una versión modificada de la teoría de Adhémar. Croll pensó que la precesión en combinación con las variaciones periódicas de la excentricidad y la inclinación de la órbita de la Tierra podrían producir glaciaciones.

En 1839, *William Hopkins* (1793-1866) hizo el primer intento de explicar los efectos de la constitución interna de la Tierra sobre la precesión y la nutación. Consideró para ello la Tierra formada por una corteza y un fluido interior.

Louis Poinsot (1777-1859) propuso un método geométrico para el estudio del movimiento de rotación de un cuerpo en rotación libre (1834;1851).

Hay que destacar también los trabajos sobre Rotación de un Cuerpo Rígido de *Sofía Sonia Cotvin-Krakovsky Kovalevskaya* (1850-1891).

En 1863, *William Thomson* -Lord Kelvin- (1824-1907) en su trabajo "On the rigidity of the Earth" propone la existencia de las mareas terrestres. Cinco años después introduce el análisis armónico en la teoría de las mareas. Por otra parte, afirmó que el movimiento del polo podría estar influido por posibles redistribuciones de materia dentro y sobre la Tierra. También estudió la relación entre la precesión y las propiedades dinámicas de la Tierra.

En 1884, *Friedrich Helmert* (1843-1917) estudió la posible relación entre la deriva secular del polo y la repercusión postglacial. *Friedrich Küstner* (1856-1936) fue el primero en detectar la variación de la latitud (1888).

Seth Carlo Chandler (1846-1913) en su trabajo "On the variation of latitude" mostró que la revolución del polo terrestre tenía un período de 427 días (1891;1892).

En 1892, *Simon Newcomb* (1835-1909) estudió el efecto de la elasticidad y de la marea oceánica sobre el movimiento del polo en su trabajo "On the dynamics of the Earth's rotation, with respect to the periodic variations of latitude". Con los dos efectos juntos, Newcomb llegó a un período teórico de 443 días, ligeramente superior al valor observado por Chandler. Un año más tarde, en 1893, *François Folie* (1833-1905) estudió la influencia del núcleo fluido de la Tierra en el movimiento del polo.

A finales de este siglo, en 1895, dos científicos *Sydney Samuel Hough* (1870-1923) y *Fedor Sludsky* (1841-1897) llegaron independientemente a la conclusión de que el núcleo fluido acortaba el período del movimiento del polo.

En lo referente al estudio de las mareas terrestres, *William Ferrel* (1817-1891) apuntó, en 1864, que la fricción de marea era la causante del alargamiento de la duración del día en 1 segundo cada 300000 años. Dos años más tarde, *George Airy* (1801-1892) llegó a la misma conclusión y afirmó también que la fricción de marea era la causante del aumento de la distancia Luna-Tierra. *Charles Delaunay* (1816-1872), trabajando independientemente, obtuvo los mismos resultados que W. Ferrel.

Jean Bernard Léon Foucault (1819-1868) realizó la demostración experimental de la rotación de la Tierra. Foucault, junto con *Fizeau*, fueron también los pioneros de la astronomía fotográfica. Las largas exposiciones necesarias para fotografiar las estrellas requerían que el telescopio permaneciera continuamente apuntando al objeto celeste. Para regular el movimiento del telescopio, Foucault en 1847 puso en práctica un proyecto de Christian Huygens para un reloj con un péndulo cónico. Observó que el péndulo giraba gradualmente con respecto al suelo y en la dirección del movimiento diurno de la esfera celeste. Encontró también que el giro horario estaba relacionado con el seno de la latitud del lugar.

En 1882, *George Darwin* (1845-1912) en su trabajo "A numerical estimate of the rigidity of the Earth" obtiene el valor numérico del número que hoy conocemos como γ , es decir, la razón entre la altura de la marea oceánica para una Tierra elástica y para una Tierra rígida. También afirmó que la fricción de marea jugaba un papel fundamental en la evolución del sistema Tierra-Luna y que hace millones de años, la Luna había estado mucho más próxima a la Tierra.

Los primeros esfuerzos en la investigación de modelos terrestres con núcleo líquido se deben a *Hopkins* (1839), *Hough* (1895) y *Sludskii* (1836) quienes descubrieron independientemente la posible existencia del basculamiento libre casi diurno (NDFW) para un cuerpo en rotación con núcleo líquido.

1.10 Siglo XX.

A lo largo de este Capítulo se ha hecho un resumen histórico, desde la Antigüedad hasta el siglo XX, de las diversas teorías sobre el estudio de la Rotación terrestre.

Cierto es que el problema de la Rotación de la Tierra está lejos de ser un tema cerrado. Durante este siglo, muchos científicos se han ocupado de profundizar en este tema. Las últimas tres décadas han visto la floración de nuevas teorías con aplicación de potentes técnicas de la Mecánica clásica. Algunos de los autores que mayormente han contribuido a este estudio se encuentran en las referencias de este trabajo.

Los tratamientos standard de la precesión y nutación de una Tierra rígida se deben a *Woolard* (1953) y especialmente a *Kinoshita* (1977) y *Kinoshita & Souchay* (1990). También destacan los trabajos de *Capitaine* (1986-1991) y *Yan & Groten* (1992) [*Capitaine et al.* 1986, *Capitaine* 1990], [*Yan & Groten* 1992]. Recientemente, muchos autores han orientado sus estudios hacia la teoría de nutación de la Tierra rígida, entre ellos: *Zhu & Groten* (1989), *Williams* (1994), *Roosbeek & Dehant* (1997), *Souchay & Kinoshita* (1996, 1997), *Hartmann & Soffel* (1997) y *Bretagnon* (1997), como ya se apuntó en la Introducción de esta Memoria.

También se han aplicado métodos de integración numérica al estudio del movimiento rotacional de un cuerpo rígido: [*Schastok et al.* 1990], [*Souchay & Kinoshita* 1991] y [*Fukushima* 1995].

En cuanto al estudio de la rotación terrestre de una Tierra no rígida hay que destacar los trabajos de *Poincaré* (1910), que consideró un modelo con corteza rígida y con un núcleo líquido afectado por un movimiento de tipo simple gobernado por las ecuaciones de Helmholtz; *Bullen* (1936, 1940); *Takeuchi* (1950); *Jeffreys* (1948); *Jeffreys & Vicente* (1957), extendieron el problema a un modelo de Tierra con un núcleo líquido y un manto elástico esférico, *Molodensky* (1953, 1961), utiliza una aproximación esférica de las ecuaciones de la elasticidad para el manto y las ecuaciones de la hidrodinámica para el núcleo líquido, obteniendo resultados numéricos excelentes; *Dahlen* (1968); *Rochester* (1970); *Stacey* (1973); *Toomre* (1974); *Loper* (1973); *Smylie & Chong* (1975); *Okamoto & Sakai* (1977); *Aoki* (1971); *Kakuta* (1971); *Munk & MacDonald* (1975); *Shen & Mansinha* (1976); *Duncome & Van Flandern* (1976); *Kubo* (1979); *Sasao, Okubo & Saito* (1980), extienden el problema de Molodensky incluyendo los efectos perturbadores del núcleo; *Lambeck* (1980, 1989); *Wahr* (1979, 1981); *Moritz & Mueller* (1985); *Kolaczek* (1989); *Pâquet, Dehant, Capitaine, Defraigne* (1997); etc. Entre sus trabajos más relevantes, destacan: [*Munk & MacDonald* 1960], [*Dahlen* 1968], [*Aoki & Kakuta* 1971], [*Kubo* 1979], [*Wahr* 1979], [*Sasao et al.* 1980], [*Lambeck* 1980], [*Aoki et al.* 1981], [*Wahr et al.* 1981], [*Aoki & Kinoshita* 1983], [*Wahr* 1986a], [*Wahr* 1986b], [*Dehant* 1986], [*Moritz & Mueller* 1987], [*Aoki* 1988], [*Kinoshita & Sasao* 1989], [*Kolaczek* 1989], [*Lambeck* 1989], [*Dehant* 1990], [*Kubo* 1991], [*Leftz et al.* 1991], [*Dehant et al.* 1993], [*Defraigne et al.* 1995], [*Roosbeek & Dehant* 1997], [*Dehant et al.* 1996], [*Dehant & Capitaine* 1997], [*Pâquet et al.* 1997] y [*Dehant & Defraigne* 1997a,b,c,d].

En España hay que resaltar los trabajos de *Sevilla* (1982-1986; 1990-1997), *Camacho* (1982-1986), *Romero* (1983-1986) y *Getino & Ferrándiz* (1989-1997). *Sevilla & Camacho* (1983) trataron el problema de Molodensky para un núcleo homogéneo. *Romero* (1984) y *Romero & Sevilla* (1985) presentaron un elegante tratamiento del problema de Molodensky, obteniendo las ecuaciones del movimiento del polo de *Sasao-Okubo-Saito* a partir de la aplicación de la teoría Hamiltoniana. Recientemente, *Getino & Ferrándiz* (1995) han estudiado el efecto de la elasticidad del manto sobre la nutación basándose también en la formulación Hamiltoniana.

Los grupos españoles de trabajo sobre Rotación de la Tierra han sido reconocidos internacionalmente. Cabe destacar también no solamente la actividad investigadora de la Sección Departamental de Astronomía y Geodesia de la Facultad de CC. Matemáticas (UCM) sino

también la labor docente realizada desde 1981 hasta 1996, en donde se han impartido numerosos Cursos de Doctorado relacionados con este tema. La cantidad de trabajos científicos publicados por los grupos de trabajo de Madrid y de Valladolid es muy numerosa, los más interesantes se encuentran en las referencias de esta Memoria: [Camacho & Sevilla 1981], [Sevilla 1982], [Sevilla & Camacho 1982], [Sevilla & Camacho 1983a,b], [Sevilla & Romero 1983a,b], [Camacho 1983], [Romero 1983], [Camacho & Sevilla 1984a,b,c], [Romero 1984], [Romero & Sevilla 1985a,b,c], [Sevilla & Romero 1985], [Sevilla & Romero 1986], [Romero & Sevilla 1986a,b,c], [Sevilla *et al.* 1986], [Sevilla & Romero 1987], [Getino 1989], [Getino & Ferrándiz 1990], [Getino & Ferrándiz 1991a,b,c], [Folgueira 1991], [Folgueira & Sevilla 1991], [Getino 1992], [Getino 1993] [Getino & Ferrándiz 1994], [Getino & Ferrándiz 1995a,b], [Getino 1995a,b], [Getino & Ferrándiz 1996a,b], [Sevilla & Folgueira 1996] y [Folgueira & Sevilla 1996a,b,c].

Capítulo 2

Desarrollo del potencial lunisolar de primer orden

2.1 Introducción.

Entre los diversos grupos de variables canónicas clásicos en Mecánica Celeste, destacaremos dos: las variables de Delaunay para el movimiento orbital elíptico [Brouwer & Clemence 1961, Cap. XI, Secc. 9] y las variables de Andoyer para el movimiento rotacional [Andoyer 1923] utilizadas por [Jupp 1972], [Kinoshita 1972,1977,1991], [Kinoshita & Souchay 1990], [Sevilla & Romero 1985,1986], [Getino & Ferrándiz 1989-1996]. Aunque las variables canónicas de Delaunay y Andoyer son las más convenientes para los estudios teóricos de los movimientos orbitales y rotacionales, respectivamente, ambas tienen defectos similares: presentan problemas con excentricidades o inclinaciones pequeñas.

Hay dos formas de evitar este tipo de dificultades. Una es adoptar variables no canónicas [Brouwer & Clemence 1961, Cap. XI, Secc. 7], lo que obligaría a abandonar las ventajas que proporciona la teoría de perturbaciones al utilizar las variables canónicas. La otra es utilizar variables canónicas diferentes.

Por lo tanto, si cambiamos de variables, éstas deberán cumplir todos o la mayoría de los siguientes requisitos:

1. que sean canónicas,
2. que estén bien definidas,
3. que tengan un claro significado geométrico o cinemático,
4. que conduzcan a la forma de una solución no más complicada que la obtenida con las variables originales.

A lo largo de este Capítulo, y siguiendo el trabajo de Kinoshita (1977), utilizaremos las variables de Andoyer para describir la rotación terrestre, e introduciremos las variables mo-

dificadas de Delaunay en la expresión general de la energía potencial gravitatoria debida a la Luna.

2.2 Resultados previos.

2.2.1 Ecuaciones del movimiento de Hamilton.

En la formulación de Lagrange, un sistema con n grados de libertad posee n ecuaciones del movimiento de la forma [Goldstein 1988, p. 25]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.2.1)$$

Como las ecuaciones (2.2.1) son de segundo orden, el movimiento del sistema estará siempre determinado cuando se especifiquen $2n$ valores iniciales. En esta ecuación, q_i ($i=1, \dots, n$) son las llamadas *coordenadas generalizadas*, \dot{q}_i representa una abreviatura de la derivada de q_i respecto al tiempo y \mathcal{L} es la *función de Lagrange* o *Lagrangiana* (diferencia entre la energía cinética y potencial; $\mathcal{L} = T - U$).

En la formulación de Hamilton se describe el movimiento mediante un sistema de $2n$ ecuaciones independientes de primer orden expresadas en función de $2n$ variables independientes. Normalmente, se toman como variables las n coordenadas generalizadas q_i y las *cantidades de movimiento conjugadas* o *generalizadas* (o *impulsos*), p_i , [Goldstein 1988, p. 67] :

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.2.2)$$

Las cantidades (q, p) se denominan *variables canónicas*.

La función:

$$\mathcal{H}(q, p, t) = \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.2.3)$$

recibe el nombre de *Hamiltoniano*. Cuando U no depende de la velocidad generalizada \dot{q}_i , \mathcal{H} representa la energía total del sistema ($T + U$). Considerando esta nueva función, las ecuaciones de Lagrange se transforman en:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ -\dot{p}_i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \\ -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Las ecuaciones (2.2.4) son las llamadas *ecuaciones canónicas de Hamilton*; constituyen un sistema de $2n+1$ ecuaciones del movimiento de primer orden.

2.2.2 Transformaciones canónicas.

Consideremos la siguiente transformación de las coordenadas y cantidades de movimiento independientes (q_i, p_i) a un nuevo sistema (Q_i, P_i) con ecuaciones de transformación:

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q, p, t) \\ P_i &= P_i(q, p, t) \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Así, las nuevas coordenadas estarán definidas no sólo en función de las antiguas coordenadas sino también en función de las cantidades de movimiento antiguas. Las transformaciones (2.2.5) para las cuales las nuevas variables (Q, P) sean canónicas se denominan *transformaciones canónicas*. Este requisito se cumplirá si existe una cierta función \mathcal{K} tal que las ecuaciones de movimiento en este nuevo sistema (Q, P) estén en la forma de Hamilton:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_i} \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

(La función \mathcal{K} desempeña el papel del Hamiltoniano en el nuevo sistema de coordenadas).

Aplicando el principio de Hamilton modificado [Goldstein 1988, p. 446] se llega a que la transformación entre dos sistemas de coordenadas canónicas (q, p) y (Q, P) satisfará también la ecuación:

$$p_i \dot{q}_i \mathcal{H} = P_i \dot{Q}_i - \mathcal{K} + \frac{dW}{dt} \quad (2.2.7)$$

La función W es una función arbitraria que hace las veces de puente entre los dos sistemas de variables canónicas y se denomina *función generatriz* de la transformación. Las transformaciones canónicas tienen las cuatro propiedades que caracterizan a un grupo:

1. La transformación identidad es canónica,
2. Si una transformación es canónica, también lo es su inversa,
3. Dos transformaciones canónicas sucesivas (operación "producto") definen una transformación que también es canónica,
4. La operación producto es asociativa.

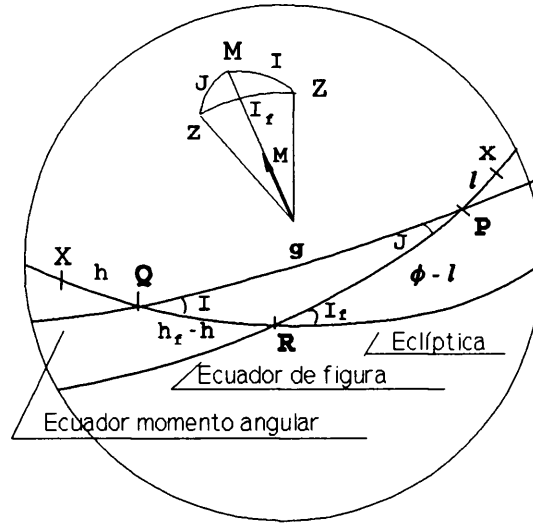


Figura 2.1: Relaciones entre los ángulos de Euler y las variables de Andoyer.

2.3 Las variables de Andoyer.

Las variables canónicas de Andoyer que utilizaremos vienen definidas por la Figura 2.1 [Kinoshita 1977], [Kinoshita & Souchay 1990a]. Los diferentes elementos que aparecen en esta figura son:

- $\{X, Y, Z\}$ sistema de referencia inercial. El origen está situado en el centro de masas de la Tierra (*sistema geocéntrico*). El plano fijo XY es el plano de la eclíptica fija, correspondiente a J2000.0. El eje X positivo está dirigido hacia el equinoccio medio fijo $\gamma_{J2000.0}$, el eje Y, 90° hacia el este, y el eje Z hacia el polo norte de la eclíptica fija.
- $\{x, y, z\}$ sistema fijo a la Tierra. El eje z, alrededor del cual el momento de inercia es máximo, se llama *eje de figura*. El plano perpendicular a este eje es el *ecuador de figura*. Los ejes x e y están en este plano. El eje x está dirigido hacia el meridiano de Greenwich, 90° hacia el este se encuentra el eje y.
- $\{h_f, I_f, \phi\}$ son los *ángulos de Euler* [Woolard 1953].
- \vec{M} denota el vector momento angular.

Las variables de Andoyer se denotan por (l, g, h) y los impulsos correspondientes por (L, G, H) , donde:

l es el ángulo en el ecuador de figura, entre el eje x y la línea nodal P (intersección del ecuador de figura y el ecuador momento angular).

g es el ángulo entre la línea nodal Q (intersección de la eclíptica y el ecuador momento angular) y la línea nodal P.

h es el ángulo entre el eje X y la línea nodal Q .

L es la componente z del vector momento angular de la Tierra.

G es el módulo del vector momento angular de la Tierra.

H es la componente Z del vector momento angular de la Tierra.

2.3.1 Las variables de Andoyer y el Hamiltoniano referido a la eclíptica móvil.

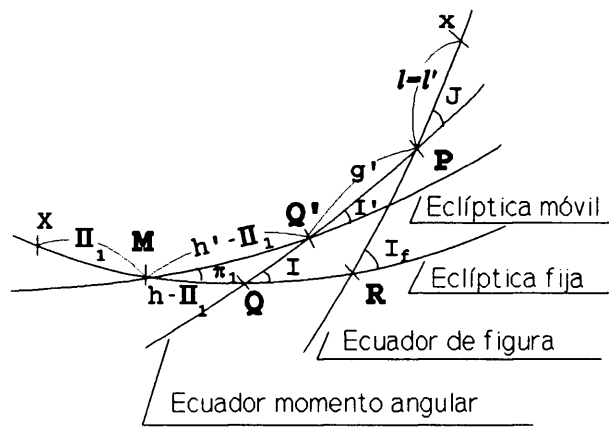


Figura 2.2: El plano móvil de referencia.

Consideremos la Figura 2.2. En ella:

π_1 es la inclinación de la eclíptica móvil - de la fecha - respecto de la eclíptica fija (correspondiente a J2000.0).

Π_1 es la longitud geocéntrica del nodo ascendente heliocéntrico, intersección de la eclíptica fija con la eclíptica móvil, contado desde el equinoccio medio fijo de $\gamma_{J2000.0}$ a lo largo de la eclíptica fija de J2000.0.

Se comprueba que la transformación:

$$(h, g, l, H, G, L) \longrightarrow (h', g', l', H', G', L')$$

ECLÍPTICA FIJA
ECLÍPTICA MÓVIL

con,

$$\begin{aligned}
h' &= XQ' = XM + MQ' \\
g' &= Q'P \\
l' &= Px = l \\
H' &= G \cos I' \\
G' &= G \\
L' &= L = G \cos J
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

es una transformación canónica [Kinoshita 1977, p. 283].

Con esta transformación, el nuevo hamiltoniano toma la forma:

$$\mathcal{K} = \mathcal{F} + E \tag{2.3.9}$$

siendo \mathcal{F} el hamiltoniano correspondiente a las variables referidas a la eclíptica fija y E tiene la expresión [Kinoshita 1977, p. 283]:

$$E = H'(1 - \cos \pi_1) \frac{d\Pi_1}{dt} + G' \sin I' \left[\frac{d\Pi_1}{dt} \sin \pi_1 \cos(h' - \Pi_1) - \frac{d\pi_1}{dt} \sin(h' - \Pi_1) \right] \tag{2.3.10}$$

Nota: En lo que sigue no pondremos el signo ' a las variables referidas al plano móvil.

2.4 Energía cinética en función de las variables de Andoyer.

La expresión general de la energía cinética de rotación es [Moritz & Mueller 1987, p. 101]:

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{M_x^2}{A} + \frac{M_y^2}{B} + \frac{M_z^2}{C} \right) \tag{2.4.11}$$

donde (M_x, M_y, M_z) son las componentes del vector momento angular \vec{M} en el sistema $\{x, y, z\}$ fijo a la Tierra y A, B y C son los momentos principales de inercia de la Tierra. Estas componentes están relacionadas con las variables canónicas de Andoyer por [Moritz & Mueller 1987, p. 101]:

$$\begin{aligned}
M_x &= \sqrt{G^2 - L^2} \sin l \\
M_y &= \sqrt{G^2 - L^2} \cos l \\
M_z &= L
\end{aligned} \tag{2.4.12}$$

Sustituyendo (2.4.12) en (2.4.11) obtenemos [Moritz & Mueller 1987, p. 101]:

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right) (G^2 - L^2) + \frac{1}{2} \frac{L^2}{C} \tag{2.4.13}$$

2.5 Energía potencial gravitatoria.

La energía potencial gravitatoria debida a la acción de un cuerpo externo, la Luna o el Sol, viene dada, en el sistema $\{x,y,z\}$, por la expresión [Tisserand 1892], [Kinoshita 1977]:

$$U = \kappa^2 M M' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{r^{n+1}} \left[J_n P_{n0}(\sin \delta) - \sum_{m=1}^n P_{nm}(\sin \delta) (C_{nm} \cos m\alpha + S_{nm} \sin m\alpha) \right] \quad (2.5.14)$$

siendo,

κ^2 constante de gravitación,

M, a masa y radio ecuatorial terrestre,

M', α, δ, r masa, ascensión recta y declinación, referidas a los ejes principales de la Tierra, del cuerpo perturbador y distancia desde el centro de masas de M' al centro de masas de la Tierra. (Cuando el cuerpo perturbador sea la Luna, se escribirá el subíndice M en las coordenadas, cuando sea el Sol, se utilizará el subíndice S).

J_n, C_{nm}, S_{nm} coeficientes armónicos del geopotencial.

$\{P_{n0}, P_{nm}\}(\sin \delta)$ polinomios de Legendre y funciones asociadas de Legendre.

Tomando como origen el centro de masas de la Tierra -no hay término correspondiente a $n=1$ -, podemos escribir:

$$U = U_1 + U_2 \quad (2.5.15)$$

con,

$$U_1 = \frac{\kappa^2 M'}{r^3} \left[\frac{2C - A - B}{2} P_{20}(\sin \delta) + \frac{A - B}{4} P_{22}(\sin \delta) \cos 2\alpha \right] \quad (2.5.16)$$

$$U_2 = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\kappa^2 M M' a^n}{r^{n+1}} \left[J_n P_{n0}(\sin \delta) - \sum_{m=1}^n P_{nm}(\sin \delta) (C_{nm} \cos m\alpha + S_{nm} \sin m\alpha) \right] \quad (2.5.17)$$

2.5.1 Fórmulas fundamentales. Polinomios modificados de Jacobi.

Sean λ y β la longitud y la latitud de un punto sobre la esfera y λ' y β' , la longitud y la latitud de ese mismo punto que rota en sentido contrario a las agujas del reloj alrededor del eje x con ángulo J . Entonces, los armónicos esféricos de grado n , $P_{nm}(\sin \beta') e^{im\lambda'}$, se pueden expresar mediante combinaciones lineales de $P_{nm'}(\sin \beta) e^{im'\lambda}$ [Wigner 1959, Kinoshita *et al.* 1974]:

$$P_{nm}(\sin \beta') e^{\pm im\lambda'} = \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_{m'=0}^n \bar{Q}_n^{(m,m')}(\epsilon, \cos J) P_{nm'}(\sin \beta) \exp \left\{ \pm i \left[m' \epsilon \lambda + \frac{\pi}{2} (m - m') \right] \right\} \quad (2.5.18)$$

donde,

$$\bar{Q}_n^{(m,m')}(\varepsilon, \cos J) = \varepsilon^{n-m} Q_n^{(m,m')}(\varepsilon \cos J) \quad (2.5.19)$$

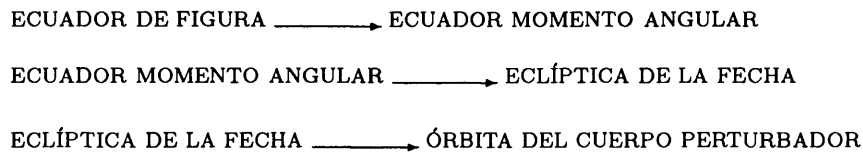
El índice ε en la ecuación anterior toma los valores $+1$ y -1 para $m' \neq 0$ y el valor $+1$ para $m' = 0$. $Q_n^{(m,m')}(z)$ son los llamados *polinomios modificados de Jacobi* y están definidos por [Szegő 1939, fórmula de Rodrigues; p. 67]:

$$Q_n^{(m,m')}(z) = \frac{(-1)^{n-m}}{2^n} \frac{(m+n)!}{(n-m)!(n+m')!} (1+z)^{-\frac{m+m'}{2}} (1-z)^{-\frac{m-m'}{2}} \times \frac{d^{n-m}}{dz^{n-m}} (1+z)^{n+m'} (1-z)^{n-m'} \quad (2.5.20)$$

Las expresiones explícitas de los polinomios modificados de Jacobi están dadas en la Tabla 2.1, hasta $(n,m,m')=(4,1,4)$. En esta tabla, la cuarta columna indica los factores numéricos, la quinta, sexta y séptima columnas, las potencias de $\sin J$, $(1+\cos J)$ y $\cos J$. Las otras columnas muestran los coeficientes de los polinomios en $\cos J$, empezando por constante [Kinoshita *et al.* 1974].

2.6 Aplicación del desarrollo en armónicos esféricos a la energía potencial gravitatoria.

Teniendo en cuenta las fórmulas anteriores, vamos a expresar U en función de las variables canónicas de Andoyer y de los elementos orbitales que nos den la posición de los cuerpos perturbadores. El proceso de transformación de variables consta de los siguientes pasos:



2.6.1 Transformación de variables del ecuador de figura al ecuador momento angular.

En esta transformación expresamos las coordenadas (α, δ) referidas al ecuador de figura en función de las coordenadas (a, b) referidas al ecuador momento angular (Figura 2.3). Utilizando la fórmula (2.5.18), que expresa la transformación lineal de armónicos esféricos, tenemos:

$$P_{nm}(\sin \delta) e^{im(\alpha+l)} = \sum_{\rho=\pm 1} \sum_{m'=0}^n \bar{Q}_n^{(m,m')}(\rho, \cos J) P_{nm'}(\sin b) \exp \left\{ i \left[m' \rho a + \frac{\pi}{2} (m - m') \right] \right\} \quad (2.6.21)$$

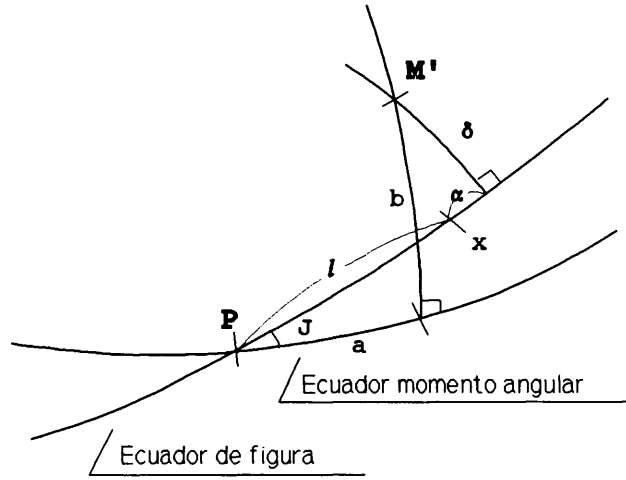


Figura 2.3:

2.6.2 Transformación de variables del ecuador momento angular a la eclíptica de la fecha.

Con esta transformación, relacionamos las coordenadas $(a + g, b)$ referidas al ecuador momento angular con las coordenadas $(\lambda - h, \beta)$ en la eclíptica móvil (Figura 2.4). Utilizando de nuevo la fórmula (2.5.18), tenemos:

$$P_{nm'}(\sin b)e^{i\rho m'(g+a)} = \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_{m''=0}^n \bar{Q}_n^{(m', m'')}(\epsilon, \cos I) P_{nm''}(\sin \beta) \times \exp \left\{ i \left[\rho \epsilon m''(\lambda - h) + \frac{\pi}{2} \rho(m' - m'') \right] \right\} \quad (2.6.22)$$

Sustituyendo (2.6.22) en (2.6.21), se tiene:

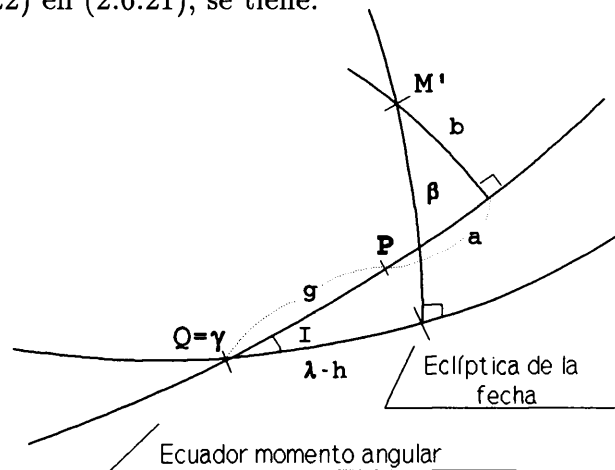


Figura 2.4:

$$P_{nm}(\sin \delta) e^{im\alpha} = \sum_{\rho, \varepsilon = \pm 1} \sum_{m', m''=0}^n \bar{Q}_n^{(m, m')}(\rho, \cos J) \bar{Q}_n^{(m', m'')}(\varepsilon, \cos I) P_{nm''}(\sin \beta) \times \\ \exp \left\{ i \left[\rho \varepsilon m'' (\lambda - h) - ml - m' \rho g + \frac{\pi}{2} (m - m') + \frac{\pi}{2} \rho (m' - m'') \right] \right\} \quad (2.6.23)$$

2.6.3 Transformación de variables de la eclíptica de la fecha a la órbita del cuerpo perturbador.

Distinguiremos en esta transformación los dos cuerpos principales externos (la Luna y el Sol) que afectan al movimiento de rotación terrestre. Desarrollaremos esta transformación en los siguientes apartados.

2.7 Expresiones de las coordenadas eclípticas de la Luna. Las variables modificadas de Delaunay.

Vamos a expresar las coordenadas eclípticas de la Luna (λ_M, β_M) en función de las variables modificadas de Delaunay y de los elementos orbitales. Definiremos primero estas nuevas variables.

2.7.1 Las variables modificadas de Delaunay.

Supongamos que el Sol es el único cuerpo que perturba el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra. Las definiciones de las *variables de Delaunay* están dadas en la Figura 2.5. En esta figura, tenemos:

$h'_M = \Omega$ es la longitud media del nodo ascendente de la órbita de la Luna,

Π_M es el perigeo lunar,

$g'_M = \omega$ es el argumento del perigeo lunar (ángulo desde N a Π_M),

i es la inclinación del plano orbital de la Luna respecto al plano de referencia (eclíptica de la fecha),

l'_M es la anomalía media de la Luna,

v es la anomalía verdadera de la Luna.

(l'_M, g'_M, h'_M) son las variables angulares de Delaunay. Los impulsos canónicos correspondientes vienen dados por las expresiones [Smart 1953]:

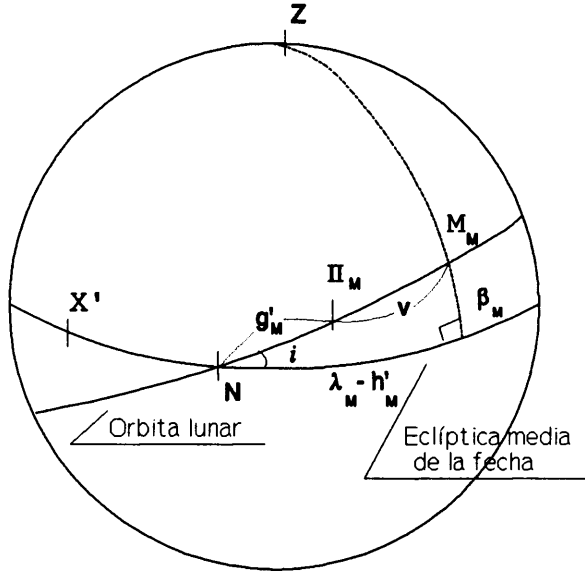


Figura 2.5: Variables de Delaunay.

$$\begin{aligned} L'_M &= \sqrt{\mu a_M} \\ G'_M &= \sqrt{\mu a_M (1 - e_M^2)} \\ H'_M &= \sqrt{\mu a_M (1 - e_M^2)} \cos i \end{aligned} \quad (2.7.24)$$

siendo $\mu = \kappa^2(M + M_M)$, M es la masa de la Tierra y M_M es la masa de la Luna, e_M es la excentricidad de la órbita de la Luna y a_M es el semieje mayor de la órbita de la Luna.

Los argumentos de Delaunay vienen dados en función del tiempo por [Kinoshita & Souchay 1990b], [Seidelmann 1992]:

$$\begin{aligned} l'_M &= 2.35555590 + 83286.91427T + 0.01570T^2 \\ g'_M &= -0.72765067 + 1047.74731T - 0.02164T^2 \\ h'_M &= 2.18243920 - 337.57045T + 0.00362T^2 \end{aligned} \quad (2.7.25)$$

siendo $T = (JD - 2451545.0)/36525$, el número de siglos julianos de 36525 días de 86400^s de tiempo dinámico a partir de la época fundamental de J2000.0.

Aquí a utilizaremos el siguiente grupo de *variables modificadas de Delaunay* [Brouwer & Clemence 1961, p.539]:

$$\begin{aligned}
l_M &= l'_M + g'_M + h'_M, \text{ longitud media de la Luna,} \\
l_M &= 3.81034443 + 83997.09113T - 0.00232T^2 \\
g_M &= g'_M + h'_M = \tilde{\omega}, \text{ longitud del perigeo lunar,} \\
g_M &= 1.45478853 + 710.17686T - 0.01802T^2 \\
h_M &= h'_M = \Omega, \text{ longitud media del nodo ascendente de la Luna,} \\
L_M &= L'_M = \sqrt{\mu a_M} \\
G_M &= G'_M - L'_M = \sqrt{\mu a_M}(\sqrt{1 - e_M^2} - 1) \\
H_M &= H'_M - G'_M = \sqrt{\mu a_M}(1 - e_M^2)(\cos i - 1)
\end{aligned} \tag{2.7.26}$$

A la vista de las definiciones (2.7.26) de las variables modificadas de Delaunay, se observa que estas variables cumplen, de momento, las tres primeras condiciones que exigíamos para cambiar de variables:

1. Son variables canónicas, [Smart 1953, Cap.11; p.170] al ser éstas combinaciones lineales de las variables canónicas de Delaunay.
2. Están mejor definidas, para el caso de excentricidades e inclinaciones pequeñas, que las variables de Delaunay [Fukushima 1994].
3. Tienen un claro significado geométrico y cinemático.

2.7.2 Expresiones de las coordenadas eclípticas de la Luna.

Longitud eclíptica. Movimiento no perturbado.

λ_M es la longitud eclíptica de la Luna referida al equinoccio medio de la fecha y a la eclíptica de la fecha. Consideremos la Figura 2.6, el triángulo esférico de la Figura 2.5. Como la inclinación i de la órbita de la Luna respecto a la eclíptica es pequeña ($i = 5^\circ.145396$), podemos hacer la siguiente aproximación:

$$\lambda_M - h'_M \approx g'_M + v$$

de aquí resulta:

$$\lambda_M = h'_M + g'_M + v \quad (\text{longitud verdadera de la Luna}) \tag{2.7.27}$$

La ecuación del centro nos da la diferencia entre la anomalía verdadera v y la anomalía media l'_M [Sevilla 1989]:

$$\begin{aligned}
 v - l'_M &= \left(2e_M - \frac{e_M^3}{4}\right) \sin l'_M + \left(\frac{5}{4}e_M^2 - \frac{11}{24}e_M^4\right) \sin 2l'_M + \frac{13}{12}e_M^3 \sin 3l'_M \\
 &+ \frac{103}{96}e_M^4 \sin 4l'_M + 0(e_M^5) = \Psi
 \end{aligned}
 \tag{2.7.28}$$

De (2.7.28), (2.7.27) y (2.7.26), obtenemos:

$$\lambda_M = l'_M + g'_M + h'_M + \Psi = l_M + \Psi \tag{2.7.29}$$

Acotación del error en la aproximación (2.7.27)

Vamos a evaluar el error cometido en la aproximación (2.7.27). Para ello dividimos el triángulo esférico de la Figura 2.6 en dos triángulos esféricos rectángulos (Figura 2.7). Acotaremos el error cuando $x + y$ sea menor que 90° . En este caso, los lados $\lambda_M - h'_M, \beta_M$ y z están en el mismo cuadrante. Utilizando la ley de los cosenos para ángulos en el triángulo esférico 2, tenemos [Folgueira & Sevilla 1996a]:

$$\sin E = \sin i \cos y$$

de ahí que,

$$|\sin E| \leq |\sin i|$$

o, en este caso:

$$E \leq i \tag{2.7.30}$$

Considerando el mismo triángulo esférico, tenemos:

$$\begin{aligned}
 \sin(\lambda_M - h'_M) \cos E &= \sin y & (a) \\
 \cos(\lambda_M - h'_M) \sin y &= \sin(\lambda_M - h'_M) \cos y \cos i & (b)
 \end{aligned}
 \tag{2.7.31}$$

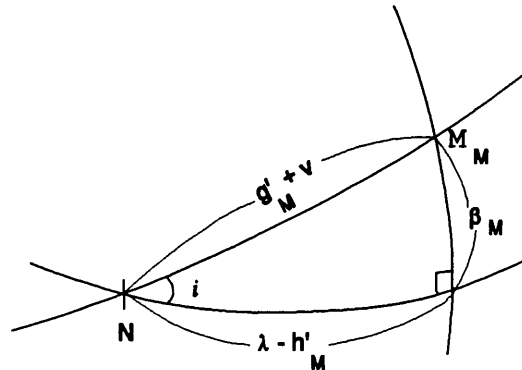


Figura 2.6:

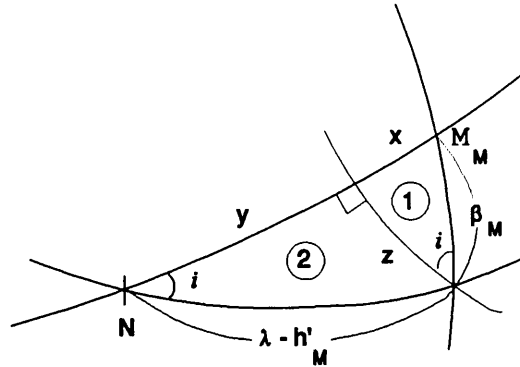


Figura 2.7:

Ahora, sustituimos (a) en (b) de (2.7.31). El resultado es:

$$\cos(\lambda_M - h'_M) \cos E = \cos y \cos i$$

Con la ayuda de la relación (2.7.30):

$$\cos(\lambda_M - h'_M) \leq \cos y$$

luego,

$$y \leq \lambda_M - h'_M$$

Sabemos que:

$$x + y = g'_M + v$$

entonces,

$$|(g'_M + v) - (\lambda_M - h'_M)| \leq x \quad (2.7.32)$$

Utilizando la segunda fórmula de Bessel en el triángulo 1 y en todo el triángulo, tenemos:

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin \beta_M \sin E \\ \sin \beta_M &= \sin i \sin(g'_M + v) \end{aligned} \quad (2.7.33)$$

de ahí que,

$$|\sin x| \leq |\sin \beta_M \sin i| = |\sin^2 i \sin(g'_M + v)| \leq |\sin^2 i| \quad (2.7.34)$$

Como $i=5^0.145396$, entonces $x \leq 6.469 \times 10^{-5} \text{ rad.}$

Longitud eclíptica. Movimiento perturbado.

La expresión (2.7.29) obtenida para la longitud eclíptica de la Luna λ_M es solamente válida en el caso de considerar el movimiento de la Luna elíptico y no perturbado. Sin embargo, la

Luna en su movimiento alrededor de la Tierra sufre perturbaciones producidas por la acción gravitatoria del Sol - que son las principales -. Existen además otras perturbaciones menores como las debidas a los planetas (que actúan de forma directa sobre la órbita lunar y de forma indirecta sobre la órbita terrestre, que a su vez influirá sobre la de la Luna), las debidas a la forma irregular de la Tierra y de la Luna, etc.

En este trabajo se considerarán solamente las perturbaciones principales que constituyen el llamado *Problema principal de la teoría de la Luna*.

En este caso, la longitud eclíptica de la Luna viene dada por la expresión [Brouwer 1961, Cap. 12], [Sevilla 1989, p. 256]:

$$\lambda_M = l_M + \Psi + \delta\lambda_M \quad (2.7.35)$$

siendo,

$$\begin{aligned} \delta\lambda_M = & \frac{11}{8}m^2 \sin 2(l_M - l_S) + \frac{15}{4}me_M \sin(l_M + g_M - 2l_S) - 3me \sin(l_S - g_S) \\ & - \frac{15}{8}m \frac{a_M}{a_S} \sin(l_M - l_S) + \frac{5}{2} \frac{a_M}{a_S} e \sin(l_M - g_S) \end{aligned} \quad (2.7.36)$$

con,

l_S es la longitud media del Sol,

g_S es la longitud del perigeo solar,

e es la excentricidad de la órbita de la Tierra,

a_S es el semieje mayor de la órbita de la Tierra,

$$m = \frac{n_S}{n_M}$$

n_M es el movimiento medio de la Luna,

n_S es el movimiento medio del Sol.

Los términos primero, segundo, tercero y cuarto del segundo miembro de (2.7.36) constituyen los *principales términos periódicos* y se denominan respectivamente *variación*, *evección*, *ecuación anual* y *desigualdad paraláctica*.

Latitud eclíptica. Funciones asociadas y polinomios de Legendre. Movimiento no perturbado.

Tenemos también que expresar β_M en función de las nuevas variables. La latitud eclíptica de la Luna β_M es el argumento de los polinomios y de las funciones asociadas de Legendre que aparecen en la expresión (2.6.23); por lo tanto, tendremos que expresar $P_{n0}(\sin \beta_M)$ y

$P_{nm}(\sin \beta_M)$ en función de las variables modificadas de Delaunay y de los elementos orbitales. Con este fin, utilizaremos las siguientes fórmulas de Bessel aplicadas al triángulo esférico de la Figura 2.6:

$$1^a \text{ Bessel : } \cos \beta_M = \cos(g'_M + v) \cos(\lambda_M - h'_M) + \sin(g'_M + v) \sin(\lambda_M - h'_M) \cos i \quad (a)$$

$$\cos(g'_M + v) = \cos \beta_M \cos(\lambda_M - h'_M) \quad (b)$$

$$2^a \text{ Bessel : } \sin \beta_M = \sin i \sin(g'_M + v) \quad (c)$$

$$3^a \text{ Bessel : } \sin(g'_M + v) \cos i = \cos \beta_M \sin(\lambda_M - h'_M) \quad (d) \quad (2.7.37)$$

Expresión de $P_{20}(\sin \beta_M)$. Utilizando la relación (2.7.37c), tenemos:

$$P_{20}(\sin \beta_M) = -\frac{1}{2}[3 \cos^2 \beta_M - 2] = -\frac{1}{2}[1 - 3 \sin^2(g'_M + v) \sin^2 i] \quad (2.7.38)$$

y con (2.7.29):

$$\sin(g'_M + v) \sin i = \sin(l_M - h_M + \Psi) \sin i \quad (a) \quad (2.7.39)$$

$$\sin^2(g'_M + v) \sin^2 i = -\frac{1}{2}[\cos 2(l_M - h_M + \Psi) - 1] \sin^2 i \quad (b)$$

La sustitución de (2.7.39b) en (2.7.38) lleva a:

$$P_{20}(\sin \beta_M) = a_0 + a_1 \cos 2(l_M - h_M + \Psi) \quad (2.7.40)$$

con,

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{1}{2}\left[1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right] \\ a_1 &= -\frac{3}{4} \sin^2 i \end{aligned} \quad (2.7.41)$$

Expresión de $P_{21}(\sin \beta_M)$. Multiplicando (b) \times (c) y (d) \times (c) en (2.7.37), tenemos:

$$\sin(g'_M + v) \cos(g'_M + v) \sin i = \sin \beta_M \cos \beta_M \cos(\lambda_M - h'_M) \quad (a) \quad (2.7.42)$$

$$\sin^2(g'_M + v) \sin i \cos i = \sin \beta_M \cos \beta_M \sin(\lambda_M - h'_M) \quad (b)$$

haciendo (a)² + (b)² en (2.7.42), obtenemos:

$$\sin^2 \beta_M \cos^2 \beta_M = \sin^2(g'_M + v) \sin^2 i [1 - \sin^2(g'_M + v) \sin^2 i]$$

entonces,

$$P_{21}(\sin \beta_M) = 3 \sin \beta_M \cos \beta_M = 3 \sin(g'_M + v) \sin i [1 - \sin^2(g'_M + v) \sin^2 i]^{1/2}$$

Aplicando la fórmula de Taylor, al primer orden de aproximación:

$$P_{21}(\sin \beta_M) = 3 \sin(g'_M + v) \sin i [1 - \frac{1}{2} \sin^2(g'_M + v) \sin^2 i] \quad (2.7.43)$$

Sustituyendo las relaciones (a) y (b) de (2.7.39) en (2.7.43), $P_{21}(\sin \beta_M)$ se convierte en:

$$P_{21}(\sin \beta_M) = b_0 \sin(l_M - h_M + \Psi) + b_1 \sin 3(l_M - h_M + \Psi) \quad (2.7.44)$$

con,

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{3}{8} \sin i [8 - 3 \sin^2 i] \\ b_1 &= \frac{3}{8} \sin^3 i \end{aligned} \quad (2.7.45)$$

Expresión de $P_{22}(\sin \beta_M)$. Con la ayuda de (2.7.37c) podemos escribir $P_{22}(\sin \beta_M)$ como:

$$P_{22}(\sin \beta_M) = 3[1 - \sin^2 \beta_M] = 3[1 - \sin^2(g'_M + v) \sin^2 i] \quad (2.7.46)$$

la relación (2.7.39b) conduce a:

$$P_{22}(\sin \beta_M) = c_0 + c_1 \cos 2(l_M - h_M + \Psi) \quad (2.7.47)$$

con,

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{3}{2} [2 - \sin^2 i] \\ c_1 &= \frac{3}{2} \sin^2 i \end{aligned} \quad (2.7.48)$$

Expresión de $P_{30}(\sin \beta_M)$. Con ayuda de las relaciones (2.7.37) podemos expresar:

$$P_{30}(\sin \beta_M) = \frac{1}{2} \sin \beta_M [5 \sin^2 \beta_M - 3]$$

de la forma:

$$P_{30}(\sin \beta_M) = d_0 \sin(l_M - h_M + \Psi) + d_1 \sin 3(l_M - h_M + \Psi) \quad (2.7.49)$$

con,

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{1}{8} \sin i [15 \sin^2 i - 12] \\ d_1 &= -\frac{5}{8} \sin^3 i \end{aligned} \quad (2.7.50)$$

Expresión de $P_{31}(\text{sen } \beta_M)$. Utilizando la segunda fórmula de Bessel, podemos escribir:

$$P_{31}(\text{sen } \beta_M) = \frac{1}{2} \cos \beta_M [15 \text{sen}^2 \beta_M - 3]$$

como:

$$P_{31}(\text{sen } \beta_M) = e_0 + e_1 \cos 2(l_M - h_M + \Psi) + e_2 \cos 4(l_M - h_M + \Psi) \quad (2.7.51)$$

con,

$$\begin{aligned} e_0 &= \frac{3}{32} [-16 + 44 \text{sen}^2 i - 15 \text{sen}^4 i] \\ e_1 &= \frac{3}{8} \text{sen}^2 i [-11 + 5 \text{sen}^2 i] \\ e_2 &= -\frac{15}{32} \text{sen}^4 i \end{aligned} \quad (2.7.52)$$

Expresión de $P_{32}(\text{sen } \beta_M)$. La función de Legendre:

$$P_{32}(\text{sen } \beta_M) = 15 \cos^2 \beta_M \text{sen } \beta_M$$

se puede escribir de la siguiente manera:

$$P_{32}(\text{sen } \beta_M) = f_0 \text{sen}(l_M - h_M + \Psi) + f_1 \text{sen } 3(l_M - h_M + \Psi) \quad (2.7.53)$$

con,

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{15}{4} \text{sen } i [4 - 3 \text{sen}^2 i] \\ f_1 &= \frac{15}{4} \text{sen}^3 i \end{aligned} \quad (2.7.54)$$

Expresión de $P_{33}(\text{sen } \beta_M)$. La función de Legendre:

$$P_{33}(\text{sen } \beta_M) = 15 \cos^3 \beta_M$$

se puede expresar como:

$$P_{33}(\text{sen } \beta_M) = g_0 + g_1 \cos 2(l_M - h_M + \Psi) + g_2 \cos 4(l_M - h_M + \Psi) \quad (2.7.55)$$

con,

$$\begin{aligned} g_0 &= \frac{15}{16} [16 - 12 \text{sen}^2 i + 3 \text{sen}^4 i] \\ g_1 &= \frac{15}{4} \text{sen}^2 i [3 - \text{sen}^2 i] \\ g_2 &= \frac{15}{16} \text{sen}^4 i \end{aligned} \quad (2.7.56)$$

Expresión de $P_{40}(\text{sen } \beta_M)$. Utilizando las relaciones de Bessel (2.7.37) podemos expresar:

$$P_{40}(\text{sen } \beta_M) = \frac{1}{8}[3 - 30 \text{sen}^2 \beta_M + 35 \text{sen}^4 \beta_M]$$

de la forma:

$$P_{40}(\text{sen } \beta_M) = h_0 + h_1 \cos 2(l_M - h_M + \Psi) + h_2 \cos 4(l_M - h_M + \Psi) \quad (2.7.57)$$

con,

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{1}{8} \left[3 - 15 \text{sen}^2 i + \frac{105}{8} \text{sen}^4 i \right] \\ h_1 &= \frac{1}{8} \left[15 \text{sen}^2 i - \frac{35}{8} \text{sen}^4 i \right] \\ h_2 &= -\frac{35}{64} \text{sen}^4 i \end{aligned} \quad (2.7.58)$$

Expresión de $P_{41}(\text{sen } \beta_M)$. Podemos escribir:

$$P_{41}(\text{sen } \beta_M) = \frac{5}{2} \text{sen } \beta_M \cos \beta_M [-3 + 7 \text{sen}^2 \beta_M]$$

como:

$$P_{41}(\text{sen } \beta_M) = i_0 \text{sen}(l_M - h_M + \Psi) + i_1 \text{sen} 3(l_M - h_M + \Psi) + i_2 \text{sen} 5(l_M - h_M + \Psi) \quad (2.7.59)$$

con,

$$\begin{aligned} i_0 &= -\frac{5}{2} \left[b_0 - \frac{7}{4} b_0 \text{sen}^2 i + \frac{7}{12} b_1 \text{sen}^2 i \right] \\ i_1 &= -\frac{5}{2} \left[b_1 + \frac{7}{12} b_0 \text{sen}^2 i - \frac{7}{6} b_1 \text{sen}^2 i \right] \\ i_2 &= -\frac{35}{24} b_1 \text{sen}^2 i \end{aligned} \quad (2.7.60)$$

Expresión de $P_{42}(\text{sen } \beta_M)$. La función de Legendre:

$$P_{42}(\text{sen } \beta_M) = \frac{15}{2} \cos^2 \beta_M [-1 + 7 \text{sen}^2 \beta_M]$$

se puede escribir de la forma:

$$P_{42}(\text{sen } \beta_M) = j_0 + j_1 \cos 2(l_M - h_M + \Psi) + j_2 \cos 4(l_M - h_M + \Psi) \quad (2.7.61)$$

con,

$$\begin{aligned} j_0 &= \frac{5}{2} \left[-c_0 + \frac{7}{4} \sin^2 i (2c_0 - c_1) \right] \\ j_1 &= \frac{5}{2} \left[-c_1 + \frac{7}{2} \sin^2 i (c_1 - c_0) \right] \\ j_2 &= -\frac{35}{8} c_1 \sin^2 i \end{aligned} \quad (2.7.62)$$

Expresión de $P_{43}(\sin \beta_M)$. La función:

$$P_{43}(\sin \beta_M) = 105 \cos^3 \beta_M \sin \beta_M$$

se puede expresar de la forma:

$$P_{43}(\sin \beta_M) = k_0 \sin(l_M - h_M + \Psi) + k_1 \sin 3(l_M - h_M + \Psi) + k_2 \sin 5(l_M - h_M + \Psi) \quad (2.7.63)$$

con,

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{35}{3} \left[c_0 b_0 - \frac{1}{2} c_1 b_0 + \frac{1}{2} c_1 b_1 \right] \\ k_1 &= \frac{35}{3} \left[c_0 b_1 + \frac{1}{2} c_1 b_0 \right] \\ k_2 &= \frac{35}{6} c_1 b_1 \end{aligned} \quad (2.7.64)$$

Expresión de $P_{44}(\sin \beta_M)$. La función de Legendre:

$$P_{44}(\sin \beta_M) = 105 \cos^4 \beta_M$$

se puede escribir como:

$$P_{44}(\sin \beta_M) = l_0 + l_1 \cos 2(l_M - h_M + \Psi) + l_2 \cos 4(l_M - h_M + \Psi) \quad (2.7.65)$$

con,

$$\begin{aligned} l_0 &= \frac{35}{3} \left[c_0^2 + \frac{1}{2} c_1^2 \right] \\ l_1 &= \frac{70}{3} c_0 c_1 \\ l_2 &= \frac{35}{6} c_1^2 \end{aligned} \quad (2.7.66)$$

Los valores numéricos de a_k , b_k , c_k , d_k , e_k , f_k , g_k , h_k , i_k , j_k y l_k ($k=0,1,2$) se encuentran en la Tabla 2.2.

Latitud eclíptica. Funciones asociadas y polinomios de Legendre. Movimiento perturbado.

Vamos a obtener expresiones de las funciones asociadas y los polinomios de Legendre cuando consideramos el movimiento perturbado de la Luna alrededor de la Tierra. Para ello, utilizaremos las expresiones obtenidas en el apartado anterior del movimiento no perturbado.

Podemos escribir la latitud eclíptica del movimiento perturbado como:

$$\beta_M = \beta_M^0 + \delta\beta_M \quad (2.7.67)$$

siendo β_M^0 , la latitud eclíptica correspondiente al movimiento elíptico de la Luna alrededor de la Tierra considerada en el apartado anterior y $\delta\beta_M$ es la *perturbación principal en latitud* cuya expresión es:

$$\delta\beta_M = \frac{3}{8}m\gamma \sin(l_M - 2l_S + h_M) \quad (2.7.68)$$

con $\gamma = \sin i$.

Expresión de $P_{20}(\sin \beta_M)$. Utilizando (2.7.67) y (2.7.68), podemos escribir $P_{20}(\sin \beta_M)$ para el movimiento perturbado como:

$$P_{20}(\sin \beta_M) = P_{20}(\sin \beta_M^0) + 3 \sin \beta_M^0 \cos \beta_M^0 \delta\beta_M \quad (2.7.69)$$

El primer término del segundo miembro de la expresión anterior ya lo hemos calculado en el apartado correspondiente al movimiento no perturbado y está dado por (2.7.40).

Con ayuda de la expresión (2.7.43) podemos escribir (2.7.69) de una forma aún más explícita en función de las funciones asociadas de Legendre del movimiento no perturbado, es decir:

$$P_{20}(\sin \beta_M) = P_{20}(\sin \beta_M^0) + P_{21}(\sin \beta_M^0) \delta\beta_M \quad (2.7.70)$$

Expresión de $P_{21}(\sin \beta_M)$. Utilizando de nuevo (2.7.67) y (2.7.68), podemos escribir la función $P_{21}(\sin \beta_M)$ para el movimiento perturbado como:

$$P_{21}(\sin \beta_M) = P_{21}(\sin \beta_M^0) + 3 \{1 - 2 \sin^2 \beta_M^0\} \delta\beta_M \quad (2.7.71)$$

El primer término del segundo miembro de la expresión (2.7.71) lo hemos calculado previamente y viene dado por la ecuación (2.7.44).

Expresión de $P_{22}(\text{sen } \beta_M)$. Procediendo de la misma forma que en los apartados anteriores, podemos escribir $P_{22}(\text{sen } \beta_M)$ para el movimiento perturbado como:

$$P_{22}(\text{sen } \beta_M) = P_{22}(\text{sen } \beta_M^0) - 6 \text{sen } \beta_M^0 \cos \beta_M^0 \delta \beta_M \quad (2.7.72)$$

El primer término del segundo miembro de la expresión anterior se obtuvo en el apartado correspondiente al movimiento no perturbado y viene dado por la ecuación (2.7.47). Con ayuda de la expresión (2.7.43) podemos escribir (2.7.72) de la forma:

$$P_{22}(\text{sen } \beta_M) = P_{22}(\text{sen } \beta_M^0) - 2 P_{21}(\text{sen } \beta_M^0) \delta \beta_M \quad (2.7.73)$$

Expresión de $P_{30}(\text{sen } \beta_M)$. La expresión obtenida para el polinomio de Legendre de grado 3, para el movimiento perturbado, es:

$$P_{30}(\text{sen } \beta_M) = P_{30}(\text{sen } \beta_M^0) + P_{31}(\text{sen } \beta_M^0) \delta \beta_M \quad (2.7.74)$$

Expresión de $P_{31}(\text{sen } \beta_M)$. La relación obtenida, después de algunos cálculos, es:

$$P_{31}(\text{sen } \beta_M) = P_{31}(\text{sen } \beta_M^0) + \frac{3}{2} \text{sen } \beta_M^0 \{13 - 15 \text{sen}^2 \beta_M^0\} \delta \beta_M \quad (2.7.75)$$

Expresión de $P_{32}(\text{sen } \beta_M)$. La expresión que hemos obtenido para esta función de Legendre es:

$$P_{32}(\text{sen } \beta_M) = P_{32}(\text{sen } \beta_M^0) + 15 \cos \beta_M^0 \{1 - 3 \text{sen}^2 \beta_M^0\} \delta \beta_M \quad (2.7.76)$$

Expresión de $P_{33}(\text{sen } \beta_M)$. La expresión final para esta función de Legendre tiene la forma:

$$P_{33}(\text{sen } \beta_M) = P_{33}(\text{sen } \beta_M^0) - 3 P_{32}(\text{sen } \beta_M^0) \delta \beta_M \quad (2.7.77)$$

Expresión de $P_{40}(\text{sen } \beta_M)$. La expresión obtenida para el polinomio de Legendre de grado 4, para el movimiento perturbado, es:

$$P_{40}(\text{sen } \beta_M) = P_{40}(\text{sen } \beta_M^0) + P_{41}(\text{sen } \beta_M^0) \delta \beta_M \quad (2.7.78)$$

Expresión de $P_{41}(\text{sen } \beta_M)$. La relación obtenida, después de algunos cálculos, es:

$$P_{41}(\text{sen } \beta_M) = P_{41}(\text{sen } \beta_M^0) - \frac{5}{2} \{3 - 27 \text{sen}^2 \beta_M^0 + 28 \text{sen}^4 \beta_M^0\} \delta \beta_M \quad (2.7.79)$$

Expresión de $P_{42}(\sin \beta_M)$. La expresión que hemos obtenido para esta función de Legendre es:

$$P_{42}(\sin \beta_M) = P_{42}(\sin \beta_M^0) - 10 P_{21}(\sin \beta_M^0) \{-4 + 7 \sin^2 \beta_M^0\} \delta \beta_M \quad (2.7.80)$$

Expresión de $P_{43}(\sin \beta_M)$. La expresión final para esta función de Legendre tiene la forma:

$$P_{43}(\sin \beta_M) = P_{43}(\sin \beta_M^0) + 35 P_{22}(\sin \beta_M^0) \{1 - 4 \sin^2 \beta_M^0\} \delta \beta_M \quad (2.7.81)$$

Expresión de $P_{44}(\sin \beta_M)$. la expresión obtenida para esta función es:

$$P_{44}(\sin \beta_M) = P_{44}(\sin \beta_M^0) - 4 P_{43}(\sin \beta_M^0) \delta \beta_M \quad (2.7.82)$$

2.8 Desarrollo de la energía potencial gravitatoria debida a la Luna. Primer orden.

Para calcular las expresiones de $(1/r_M^3) P_{20}(\sin \delta_M)$ y $(1/r_M^3) P_{22}(\sin \delta_M) \cos 2\alpha_M$ tenemos primero que encontrar las expresiones de $(1/r_M^3) P_{2m}(\sin \beta_M)$. Hasta el cuarto orden de e_M , tenemos, para el movimiento perturbado [Sevilla 1989, p. 256]:

$$\frac{a_M}{r_M} = \left(\frac{a_M}{r_M} \right)_0 + \delta \left(\frac{a_M}{r_M} \right) \quad (2.8.83)$$

siendo,

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_M}{r_M} \right)_0 &= 1 + \left(e_M - \frac{e_M^3}{8} \right) \cos(l_M - g_M) + \left(e_M^2 - \frac{e_M^4}{3} \right) \cos 2(l_M - g_M) \\ &+ \frac{9}{8} e_M^3 \cos 3(l_M - g_M) + \frac{4}{3} e_M^4 \cos 4(l_M - g_M) \end{aligned} \quad (2.8.84)$$

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{a_M}{r_M} \right) &= m^2 \cos 2(l_M - l_S) + \frac{15}{4} m e_M \cos(l_M + g_M - 2l_S) - \frac{15}{16} m \frac{a_M}{a_S} \cos(l_M - l_S) \\ &- \frac{1}{2} m^2 + \frac{5}{4} \frac{a_M}{a_S} e \cos(l_M - g_S) \end{aligned} \quad (2.8.85)$$

Podemos aproximar $\lambda_m = \lambda_M - h$ (longitud referida al equinoccio momento angular), que aparece en la energía potencial gravitatoria debida a la Luna, a λ_M de la relación (2.7.35) (longitud referida al equinoccio medio de la fecha y la eclíptica de la fecha) debido a que el polo de rotación y el polo momento angular están muy próximos. Entonces, desarrollando

las funciones $P_{20}(\sin \beta_M)$, $P_{21}(\sin \beta_M)\{\sin \lambda_m, \cos \lambda_m\}$ y $P_{22}(\sin \beta_M)\{\sin 2\lambda_m, \cos 2\lambda_m\}$ en series trigonométricas obtenemos las expresiones que se muestran a continuación. Las Tablas 2.3, 2.4 y 2.5 muestran los coeficientes de cada desarrollo. El cálculo numérico se ha hecho con los ordenadores SunOS y Silicon Graphics de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid y se ha utilizado MAPLE V 3-4 para desarrollar nuestras series trigonométricas finitas. En los cálculos hemos eliminado previamente la ecuación del centro, Ψ , de los argumentos en donde aparece. Para ello, hemos realizado aproximaciones de

$$\cos\{\Psi, 2\Psi, 3\Psi, 4\Psi, 5\Psi\}$$

y

$$\sin\{\Psi, 2\Psi, 3\Psi, 4\Psi, 5\Psi\}$$

hasta el cuarto orden de la excentricidad de la órbita de la Luna. En todos los cálculos se consideran 10 decimales. El resultado es:

$$\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^3 P_{20}(\sin \beta_M) = \sum_i A_i^0 \cos \chi_i \quad (a)$$

$$\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^3 P_{21}(\sin \beta_M) \sin \lambda_m = \sum_i A_i^1 \cos \chi_i \quad (b1) \quad (2.8.86)$$

$$\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^3 P_{21}(\sin \beta_M) \cos \lambda_m = \sum_i \bar{A}_i^1 \sin \chi_i \quad (b2)$$

$$\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^3 P_{22}(\sin \beta_M) \sin 2\lambda_m = \sum_i \bar{A}_i^2 \sin \chi_i \quad (c1)$$

$$\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^3 P_{22}(\sin \beta_M) \cos 2\lambda_m = \sum_i A_i^2 \cos \chi_i \quad (c2)$$

con,

$$\chi_i = i_1 l_M + i_2 g_M + i_3 h_M + i_4 l_S + i_5 g_S \quad (2.8.87)$$

$$i = (i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$$

A partir de la naturaleza de las funciones trigonométricas, tenemos:

$$\begin{aligned} \bar{A}_i^1 &= -A_i^1 \\ \bar{A}_i^2 &= A_i^2 \end{aligned} \quad (2.8.88)$$

Los coeficientes $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$ verifican las siguientes relaciones:

- En el desarrollo (a) de (2.8.86): $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 = 0$.
- En los desarrollos (b1) y (b2) de (2.8.86): $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 = 1$.
- En los desarrollos (c1) y (c2) de (2.8.86): $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 = 2$.

A partir de las expresiones (2.8.86) y (2.8.88), tenemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^3 P_{20}(\sin \beta_M) \cos u &= \frac{1}{2} \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i A_i^0 \cos(u - \epsilon \chi_i) \\ \sum_{\epsilon=\pm 1} \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^3 P_{21}(\sin \beta_M) \sin(\lambda_m - \epsilon u) &= \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i A_i^1 \cos(u - \epsilon \chi_i) \\ \sum_{\epsilon=\pm 1} \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^3 P_{22}(\sin \beta_M) \cos(2\lambda_m - \epsilon u) &= \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i A_i^2 \cos(u - \epsilon \chi_i) \end{aligned} \quad (2.8.89)$$

siendo u una combinación lineal de las variables de Andoyer l y g .

Sustituyendo (2.8.89) y las expresiones explícitas de los polinomios modificados de Jacobi en (2.6.23), obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^3 P_{20}(\sin \delta_M) &= \frac{3}{2}(3 \cos^2 J - 1) \sum_i B_i \cos \chi_i \\ &- \frac{3}{2} \sin 2J \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i C_i(\epsilon) \cos(g - \epsilon \chi_i) \\ &+ \frac{3}{4} \sin^2 J \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i D_i(\epsilon) \cos(2g - \epsilon \chi_i) \end{aligned} \quad (2.8.90)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^3 P_{22}(\sin \delta_M) \cos 2\alpha_M &= -\frac{9}{2} \sin^2 J \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i B_i \cos(2l - \epsilon \chi_i) \\ &- 3 \sum_{\rho=\pm 1} \rho \sin J (1 + \rho \cos J) \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i C_i(\epsilon) \cos(2\rho l + g - \epsilon \chi_i) \\ &- \frac{3}{4} \sum_{\rho=\pm 1} (1 + \rho \cos J)^2 \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i D_i(\epsilon) \cos(2\rho l + 2g - \epsilon \chi_i) \end{aligned} \quad (2.8.91)$$

con,

$$B_i = \frac{1}{6}[3 \cos^2 I - 1]A_i^0 - \frac{1}{6} \sin 2I A_i^1 - \frac{1}{12} \sin^2 I A_i^2$$

$$C_i(\varepsilon) = \frac{1}{4} \sin 2I A_i^0 + \frac{1}{6}(1 + \varepsilon \cos I)(-1 + 2\varepsilon \cos I)A_i^1 + \frac{1}{12}\varepsilon \sin I (1 + \varepsilon \cos I)A_i^2 \quad (2.8.92)$$

$$D_i(\varepsilon) = \frac{1}{2} \sin^2 I A_i^0 + \frac{1}{3}\varepsilon \sin I (1 + \varepsilon \cos I)A_i^1 - \frac{1}{12}(1 + \varepsilon \cos I)^2 A_i^2$$

Las expresiones (2.8.90) y (2.8.91) se sustituyen en la expresión (2.5.16) de U_1 obteniéndose el desarrollo de la energía potencial gravitatoria debida a la Luna al primer orden.

2.9 Desarrollo de la energía potencial gravitatoria debida al Sol. Primer orden.

Consideremos ahora el Sol como astro perturbador. Entonces, tenemos aproximadamente:

$$\beta_S = 0 \quad (2.9.93)$$

de ahí que sólo tenemos que calcular:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_S}{r_S}\right)^3 P_{20}(\sin \beta_S) &\approx -\frac{1}{2} \left(\frac{a_S}{r_S}\right)^3 \\ \left(\frac{a_S}{r_S}\right)^3 P_{22}(\sin \beta_S) \cos(2\lambda_S - 2h) &\approx 3 \left(\frac{a_S}{r_S}\right)^3 \cos(2\lambda_S - 2h) \end{aligned} \quad (2.9.94)$$

donde r_S es la distancia Tierra-Sol, a_S el semieje mayor y λ_S la longitud verdadera del Sol a lo largo de la eclíptica de la fecha, medida a partir del equinoccio de la fecha.

Vamos a expresar los desarrollos (2.9.94) en función de las variables l_S (longitud media del Sol) y g_S (longitud del perigeo solar). Las expresiones de estas variables en función del tiempo son:

$$\begin{aligned} l_S &= -1.38812231 + 6283.31966T + 0.00052T^2 \\ g_S &= -7.62818244 + 0.30011T + 0.00078T^2 \end{aligned} \quad (2.9.95)$$

Hasta el cuarto orden de la excentricidad de la órbita de la Tierra, e , tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{a_S}{r_S} &= 1 + \left(e - \frac{e^3}{8}\right) \cos(l_S - g_S) + \left(e^2 - \frac{e^4}{3}\right) \cos 2(l_S - g_S) + \frac{9}{8}e^3 \cos 3(l_S - g_S) \\ &+ \frac{4}{3}e^4 \cos 4(l_S - g_S) \end{aligned} \quad (2.9.96)$$

La longitud del Sol, referida al equinoccio de la fecha:

$$\lambda_S = l_S + \Psi' \quad (2.9.97)$$

donde Ψ' representa la ecuación del centro y viene dada por [Sevilla 1989]:

$$\begin{aligned} \Psi' = & \left(2 - \frac{e^2}{4}\right)e \sin(l_S - g_S) + \left(\frac{5}{4} - \frac{11}{24}e^2\right)e^2 \sin 2(l_S - g_S) + \frac{13}{12}e^2 \sin 3(l_S - g_S) \\ & + \frac{103}{96}e^4 \sin 4(l_S - g_S) + O(e^5) \end{aligned} \quad (2.9.98)$$

Procediendo de la misma forma que en el desarrollo de la energía gravitatoria debida a la Luna, aproximamos $\lambda_s = \lambda_S - h$ a λ_S definido en (2.9.97). Entonces, podemos escribir (2.9.94) de la forma:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_S}{r_S}\right)^3 P_{20}(\sin \beta_S) &= \sum_i A_i'^0 \cos \chi_i \\ \left(\frac{a_S}{r_S}\right)^3 P_{22}(\sin \beta_S) \cos 2\lambda_s &= \sum_i A_i'^2 \cos \chi_i \end{aligned} \quad (2.9.99)$$

donde χ_i es una combinación lineal de las variables l_S y g_S . Los valores de los coeficientes $A_i'^0$ y $A_i'^2$ están dados en las Tablas 2.6 y 2.7. Estos últimos desarrollos se incluirán en la expresión (2.5.16) de U_1 obteniéndose la energía potencial gravitatoria debida al Sol al primer orden.

2.10 Conclusiones y resultados numéricos.

Las tablas 2.3, 2.4, 2.5, 2.6 y 2.7 muestran todos los coeficientes del desarrollo del potencial lunisolar (primer orden) incluyendo todos los términos hasta $0.1 \times 10^{-9} \text{ rad.}$ calculados con las fórmulas (2.8.86) y (2.9.99).

El cálculo de las series se ha hecho con MAPLE V 3-4. Dichas series se han truncado en el cuarto orden de las excentricidades de la órbita de la Luna y del Sol y en el tercer orden del seno de la inclinación de la órbita lunar.

A la vista de los resultados obtenidos, se observa que las variables utilizadas en esta Memoria conducen a un desarrollo de la energía potencial similar al obtenido por Kinoshita (1977) por lo que el grupo de variables considerado cumple también el cuarto requisito apuntado en la introducción de este Capítulo. Además se verifican una serie de relaciones entre los coeficientes $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$ que simplificarán algo la programación de las expresiones correspondientes.

Los polinomios y las funciones asociadas de Legendre para el movimiento perturbado se han obtenido a partir de las correspondientes al movimiento no perturbado. A partir de (2.7.70), (2.7.73), (2.7.74), (2.7.77), (2.7.78) y (2.7.82) vemos que existen una serie de relaciones de recurrencia, al primer orden de aproximación de $\delta\beta_M$:

$$P_{n0}(\sin \beta_M) = P_{n0}(\sin \beta_M^0) + P_{n1}(\sin \beta_M^0) \delta\beta_M \quad (2.10.100)$$

$$P_{nn}(\sin \beta_M) = P_{nn}(\sin \beta_M^0) - n P_{n(n-1)}(\sin \beta_M^0) \delta\beta_M \quad (2.10.101)$$

Las variables utilizadas por Kinoshita (1977) y Kinoshita & Souchay (1990) para describir el movimiento perturbado de la Luna están relacionadas con las variables utilizadas en este trabajo mediante unas sencillas ecuaciones de transformación:

$$(l_M, g_M, h_M, l_S, g_S) \longrightarrow (l_L, l_\odot, F, D, \Omega)$$

$$\begin{aligned} l_M &= F + \Omega \\ g_M &= -l_L + F + \Omega \\ h_M &= \Omega \\ l_S &= F - D + \Omega \\ g_S &= -l_\odot + F - D + \Omega \end{aligned} \quad (2.10.102)$$

donde,

l_L es la anomalía media de la Luna,

l_\odot es la anomalía media del Sol,

F es la diferencia entre la longitud media de la Luna y la longitud media del nodo ascendente de la Luna,

D es la diferencia entre la longitud media de la Luna y la longitud media del Sol,

Ω es la longitud del nodo ascendente de la Luna.

Folgueira & Sevilla (1996) han comparado algunos de los coeficientes más importantes en ambos desarrollos. Nuestros coeficientes y los obtenidos por Kinoshita (1977) y Kinoshita & Souchay (1990) se diferencian a partir del cuarto decimal [Folgueira & Sevilla 1996c]. Esta pequeña discrepancia puede ser debida a varias razones, entre ellas, los diferentes valores numéricos de las constantes que intervienen en los desarrollos de las series trigonométricas, aproximaciones en los desarrollos de los polinomios y las funciones de Legendre, etc.

Los valores numéricos de las diferentes constantes utilizadas en este Capítulo se encuentran recopilados en el Apéndice 1.

Tabla 2.1: $Q_n^{(m,m')}(z = \cos J)$

n	m	m'	Factor Num.	sen J	1+z	z	z ⁰	z ¹	z ²	z ³	z ⁴
2	0	0	1/2	0	0	0	-1	0	3		
2	0	1	1/2	1	0	1	-1				
2	0	2	1/8	2	0	0	1				
2	1	0	3	1	0	1	1				
2	1	1	1/2	0	1	0	-1	2			
2	1	2	1/4	1	1	0	-1				
2	2	0	3	2	0	0	1				
2	2	1	1	1	1	0	1				
2	2	2	1/4	0	2	0	1				
3	0	0	1/2	0	0	0	-3	0	5		
3	0	1	1/8	1	0	1	1	0	-5		
3	0	2	1/8	2	0	0	1				
3	0	3	1/48	3	0	1	-1				
3	1	0	3/2	1	0	0	-1	0	5		
3	1	1	1/8	0	1	0	-1	-10	15		
3	1	2	1/8	1	1	0	1	-3			
3	1	3	1/16	2	1	0	1				
3	2	0	15	2	0	1	1				
3	2	1	5/4	1	1	0	-1	3			
3	2	2	1/4	0	2	0	-2	3			
3	2	3	1/8	1	2	0	-1				
3	3	0	15	3	0	0	1				
3	3	1	15/4	2	1	0	1				
3	3	2	3/4	1	2	0	1				
3	3	3	1/8	0	3	0	1				
4	0	0	1/2	0	0	0	3	0	-30	0	35
4	0	1	1/8	1	0	1	3	0	-7		
4	0	2	1/48	2	0	0	-1	0	7		
4	0	3	1/48	3	0	1	-1				
4	0	4	1/384	4	0	0	1				
4	1	0	5/2	1	0	1	-3	0	7		
4	1	1	1/8	0	1	0	3	-6	-21	28	
4	1	2	1/24	1	1	0	1	7	-14		
4	1	3	1/48	2	1	0	-1	4			
4	1	4	1/96	3	1	0	-1				

Tabla 2.2: Movimiento no perturbado. Valores numéricos de las constantes.

	k=0	k=1	k=2
a_k	-0.493967660	-0.006032339	
b_k	0.268238824	0.000270500	
c_k	2.987935320	0.012064679	
d_k	-0.133172660	-0.000450834	
e_k	-1.466913104	-0.033056572	-0.000030324
f_k	1.337136614	0.002705005	
g_k	14.90969685	0.090242503	0.000060649
h_k	0.360025284	0.015045471	0.000035378
i_k	-0.661161272	-0.003816226	-0.000003173
j_k	-7.259980026	-0.239595433	-0.000424540
k_k	9.331744114	0.028307367	0.000019037
l_k	104.1580197	0.841131255	0.000849080

Tabla 2.3: Desarrollo de $\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^3 P_{20}(\sin \beta_M)$.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_1^0 \times 10^{-9} \text{ (rad)}$	PERÍODO (días)
1	0	0	0	0	0	-496207707.9	
2	1	-1	0	0	0	-81324719.3	27.55455
3	1	1	0	-2	0	-23193352.2	31.81194
4	2	0	0	-2	0	-9844897.3	14.76529
5	2	-2	0	0	0	-6689253.5	13.77727
6	2	0	-2	0	0	-5934765.0	13.60611
7	0	2	0	-2	0	-1282144.6	-205.89221
8	3	-1	-2	0	0	-1137912.8	9.10846
9	3	-1	0	-2	0	-586414.6	9.61372
10	3	-3	0	0	0	-540786.4	9.18485
11	0	0	2	-2	0	293067.7	-173.31004
12	1	0	0	-1	0	267912.2	29.53059
13	2	2	0	-4	0	-178757.9	15.90597
14	1	1	-2	0	0	175956.1	26.87829
15	3	1	0	-4	0	-140529.0	10.08460
16	3	1	-2	-2	0	-134242.0	9.53006
17	1	-1	-2	2	0	-99338.0	23.77462
18	1	-3	0	2	0	-88013.6	24.30219
19	4	-2	-2	0	0	-80151.4	6.84558
20	1	0	0	0	-1	-79287.6	27.32168
21	4	0	-2	-2	0	-72689.8	7.08101
22	0	2	-2	0	0	72533.6	1095.17505
23	4	-4	0	0	0	-43073.9	6.88864
24	4	-2	0	-2	0	-41225.4	7.12709
25	4	0	0	-4	0	-30561.3	7.38265
26	2	-2	-2	2	0	-19014.1	12.76270
27	0	1	0	-1	0	18807.1	-411.78443
28	2	-1	0	-1	0	14718.9	14.25418
29	1	-1	2	-2	0	13719.0	32.76364
30	5	-3	-2	0	0	-11422.3	5.48332
31	5	-1	-2	-2	0	-9299.6	5.63335
32	2	2	-2	-2	0	8343.6	14.56887
33	1	1	2	-4	0	7348.4	38.96398
34	2	-4	0	2	0	-6287.0	12.91319
35	1	-3	2	0	0	5941.0	28.26571
36	1	3	0	-4	0	-4995.2	37.62535
37	0	1	0	0	-1	-4366.3	3232.86180
38	2	-1	0	0	-1	-4366.3	13.71881
39	2	1	0	-3	0	4158.3	15.31442
40	2	0	2	-4	0	2749.1	16.14039
41	1	3	-2	-2	0	1706.9	30.91397
42	3	0	-2	-1	0	1618.3	9.31449
43	1	0	-2	1	0	1521.6	25.23137
44	6	-4	-2	0	0	-1318.7	4.57325
45	4	2	-2	-4	0	-990.4	7.33321
46	5	1	-2	-4	0	-908.9	5.79181
47	3	-3	-2	2	0	-698.7	8.72258
48	6	-2	-2	-2	0	-566.4	4.67714
49	2	-4	2	0	0	491.5	13.95280
50	1	0	-2	0	1	-478.3	27.10364
51	3	0	-2	0	-1	-478.3	9.08287
52	5	-3	0	-2	0	-392.9	5.66247
53	5	-1	0	-4	0	-363.9	5.82261
54	2	0	-4	2	0	329.8	12.61569
55	2	-2	2	-2	0	326.1	14.96708
56	0	2	2	-4	0	-293.5	-94.10067
57	2	-1	-2	1	0	281.0	13.17092
58	4	-1	-2	-1	0	266.2	6.96130
59	6	0	-2	-4	0	-252.3	4.78585
60	4	-4	-2	2	0	-160.2	6.62530

Tabla 2.3: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_v^0 \times 10^{-9}$ (rad)	PERÍODO (días)
61	3	3	-2	-4	0	97.4	9.99258
62	0	4	-2	-2	0	95.4	-253.56164
63	1	0	2	-3	0	-93.9	35.59582
64	0	1	-2	1	0	-92.8	299.26222
65	3	0	0	-3	0	91.3	9.84353
66	1	-3	-2	4	0	-89.7	21.31353
67	7	-5	-2	0	0	-86.4	3.92227
68	3	-1	-4	2	0	81.4	8.65366
69	2	-1	-2	0	1	-78.9	13.66362
70	4	-1	-2	0	-1	-78.9	6.83111
71	7	-3	-2	-2	0	-74.4	3.99844
72	2	1	-2	-1	0	-67.9	14.07104
73	2	2	2	-6	0	63.3	17.51330
74	3	-5	2	0	0	60.2	9.26253
75	4	2	0	-6	0	-58.4	7.65721
76	5	1	0	-6	0	-48.0	5.99206
77	3	1	2	-6	0	42.4	10.70766
78	6	-4	0	-2	0	-36.7	4.69720
79	1	2	-2	-1	0	-28.5	28.75523
80	1	1	-4	2	0	-28.3	23.26948
81	1	0	0	-2	1	-27.0	32.12809
82	1	0	2	-2	-1	27.0	32.43492
83	1	0	-2	2	-1	27.0	23.60106
84	3	0	0	-2	-1	-27.0	9.58521
85	0	1	-2	0	1	26.9	1656.25277
86	2	1	-2	0	-1	26.9	13.54909
87	6	-2	0	-4	0	-25.7	4.80686
88	1	-2	2	-1	0	-25.2	30.34893
89	4	1	-2	-3	0	25.1	7.20491
90	7	-1	-2	-4	0	-17.5	4.07762
91	3	-3	2	-2	0	17.2	9.69886
92	5	-5	-2	2	0	-16.7	5.34107
93	2	4	-2	-4	0	14.0	15.67826
94	0	1	2	-3	0	13.7	-121.97411
95	6	0	0	-6	0	-11.7	4.92176
96	4	-1	0	-3	0	10.0	7.25262
97	1	-5	2	2	0	9.3	24.85370
98	0	2	-4	2	0	-8.8	149.63111
99	3	-2	-2	1	0	8.4	8.91135,
100	1	-1	-4	4	0	8.2	20.90665
101	1	2	-2	0	-1	7.7	26.65667
102	1	-2	2	0	-1	7.7	28.02072
103	3	1	-4	0	0	7.3	9.03333
104	4	-2	2	-4	0	-6.9	7.43275
105	4	0	2	-6	0	6.5	7.71113
106	8	-4	-2	-2	0	-6.1	3.49175
107	5	-2	-2	-1	0	6.0	5.55732
108	3	-1	2	-4	0	5.5	10.17832
109	1	3	2	-6	0	5.1	48.05885
110	8	-6	-2	0	0	-4.7	3.43352
111	4	0	-4	0	0	4.4	6.80306
112	2	-4	-2	4	0	4.3	12.01776
113	4	-2	-4	2	0	4.0	6.58546
114	0	1	2	-2	-1	3.0	-183.12728
115	2	-1	0	-2	1	-3.0	14.83304
116	2	-1	-2	2	-1	3.0	12.71252
117	4	-1	0	-2	-1	-3.0	7.11141
118	3	2	-2	-3	0	-2.8	9.75584
119	5	0	-2	-3	0	2.8	5.71148
120	4	-6	2	0	0	2.5	6.93224

Tabla 2.3: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_i^0 \times 10^{-9}$ (rad)	PERÍODO (días)
121	1	-2	-2	3	0	2.4	22.47691
122	0	0	4	-4	0	1.9	-86.65502
123	3	3	0	-6	0	1.8	10.60398
124	3	-2	-2	0	1	-1.8	9.13420
125	5	-2	-2	0	-1	-1.8	5.47403
126	7	-5	0	-2	0	-1.8	4.01309
127	2	-2	-4	4	0	1.7	11.88731
128	4	-4	2	-2	0	-1.6	7.17378
129	7	-3	0	-4	0	-1.6	4.09286
130	3	-5	0	2	0	1.5	8.79261
131	5	-5	2	-2	0	-1.5	5.69190
132	2	1	2	-5	0	-1.4	16.79884
133	4	1	0	-5	0	1.4	7.51742
134	5	-3	2	-4	0	-1.4	5.85373
135	0	3	-2	-1	0	-1.1	-659.90960
136	0	4	0	-4	0	1.1	-102.94611
137	6	-3	-2	-1	0	1.1	4.62461
138	4	-3	-2	1	0	1.0	6.73364
139	5	-3	-4	2	0	1.0	5.31515
140	2	2	-4	0	0	-0.9	13.43915
141	1	-3	4	-2	0	-0.8	33.77403
142	2	-3	2	-1	0	-0.8	14.44216
143	6	-6	-2	2	0	-0.8	4.47387
144	1	2	0	-3	0	-0.7	34.47529
145	5	-1	2	-6	0	-0.7	6.02503
146	3	-2	2	-3	0	0.6	9.93281
147	5	-1	-4	0	0	0.6	5.45600
148	1	-1	4	-4	0	-0.5	40.40137
149	1	-2	0	1	0	-0.5	25.82638
150	3	-5	-2	4	0	-0.5	8.36807
151	7	-1	0	-6	0	-0.5	4.17587
152	2	-6	2	2	0	0.4	13.06726
153	3	-2	0	-1	0	0.4	9.39439
154	8	-2	-2	-4	0	-0.4	3.55199
155	9	-5	-2	-2	0	-0.4	3.09904
156	9	-7	-2	0	0	-0.4	3.05308
157	0	3	-2	0	-1	0.3	818.04978
158	1	5	-2	-4	0	0.3	36.37564
159	2	4	0	-6	0	0.3	17.23765
160	2	-3	2	0	-1	0.3	13.89284
161	4	-3	-2	0	1	-0.3	6.86011
162	5	-2	0	-3	0	0.3	5.74142
163	5	-5	0	0	0	-0.3	5.51091
164	6	-3	-2	0	-1	-0.3	4.56679
165	1	2	0	-2	-1	0.2	31.50196
166	1	3	-4	0	0	-0.2	26.23444
167	1	-2	0	2	-1	0.2	24.12087
168	1	-2	2	-2	1	-0.2	33.09908
169	1	-5	0	4	0	0.2	21.73655
170	2	3	-2	-3	0	-0.2	15.10322
171	2	-1	2	-3	0	-0.2	15.53161
172	3	-2	2	-2	-1	-0.2	9.66985
173	5	-4	-2	1	0	0.2	5.41126
174	7	-4	-2	-1	0	0.2	3.95999
175	9	-3	-2	-4	0	-0.2	3.14639
176	0	4	2	-6	0	0.1	-64.58352
177	1	-2	-2	2	1	0.1	23.95076
178	3	-2	0	-2	1	-0.1	9.64239
179	5	-2	0	-2	-1	-0.1	5.65257
180	6	-4	-4	2	0	0.1	4.45567
181	8	-4	0	-4	0	-0.1	3.56355

Tabla 2.4: Desarrollo de $\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^3 P_{21}(\sin \beta_M) \sin \lambda_m$.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_i^1 \times 10^{-9} \text{ (rad)}$	PERÍODO (días)
1	0	0	1	0	0	133631856.6	-6798.38366
2	2	0	-1	0	0	-131982862.9	13.63340
3	3	-1	-1	0	0	-25415681.1	9.12068
4	-1	1	1	0	0	10970398.3	-27.44332
5	1	-1	1	0	0	10917117.4	27.66669
6	1	1	1	-2	0	4115288.7	31.96150
7	3	1	-1	-2	0	-3986231.5	9.54344
8	1	1	-1	0	0	3834334.3	26.98498
9	0	0	-1	2	0	3260951.7	177.84378
10	4	-2	-1	0	0	-2591277.8	6.85248
11	4	0	-1	-2	0	-2329047.1	7.08839
12	-1	-1	1	2	0	2076395.5	-31.66378
13	2	0	1	-2	0	-1830522.2	14.79743
14	1	-1	-1	2	0	-1607173.7	23.85806
15	0	2	-1	0	0	804629.2	1305.47920
16	-2	0	1	2	0	706605.1	-14.73330
17	3	-1	1	-2	0	-412597.6	9.62733
18	5	-1	-1	-2	0	-345686.0	5.63802
19	5	-3	-1	0	0	-276123.1	5.48774
20	2	-2	-1	2	0	-269624.6	12.78671
21	0	2	1	-2	0	255326.1	-199.83997
22	0	0	1	1	-1	-250494.5	385.99833
23	0	0	1	-1	1	250494.4	-346.63579
24	2	0	-1	-1	1	-247479.2	14.16200
25	2	0	-1	1	-1	247479.0	13.14284
26	2	2	-1	-2	0	210499.1	14.60016
27	-1	1	-1	2	0	162620.0	-32.60650
28	-2	0	3	0	0	133021.8	-13.57893
29	4	0	-3	0	0	-128028.7	6.80987
30	-2	2	1	0	0	105167.7	-13.74941
31	2	-2	1	0	0	99843.5	13.80525
32	0	-2	1	2	0	81443.3	212.32250
33	3	1	1	-4	0	-74819.7	10.09958
34	-1	-1	-1	4	0	62796.6	-38.74193
35	1	0	1	-1	0	-60022.6	29.65942
36	3	0	-1	-1	0	59657.4	9.32727
37	4	0	1	-4	0	-49956.4	7.39067
38	2	2	1	-4	0	48426.7	15.94327
39	3	-1	-1	1	-1	47644.9	8.89848
40	3	-1	-1	-1	1	-47644.9	9.35426
41	4	-2	1	-2	0	-46087.6	7.13457
42	5	1	-1	-4	0	-44382.7	5.79675
43	4	2	-1	-4	0	-44314.0	7.34113
44	5	-1	-3	0	0	-39288.6	5.46038
45	6	-2	-1	-2	0	-31316.6	4.68036
46	6	-4	-1	0	0	-29616.1	4.57633
47	-3	1	3	0	0	25178.0	-9.09627
48	1	3	-1	-2	0	24806.8	31.05519
49	-1	3	-1	0	0	21436.6	-28.14868
50	-1	1	1	-1	1	20594.7	-25.52549
51	-1	1	1	1	-1	-20594.6	-29.67274
52	1	-1	1	1	-1	-20390.1	25.71862
53	1	-1	1	-1	1	20390.0	29.93405
54	3	1	-3	0	0	19152.6	9.04535
55	3	-3	-1	2	0	-18068.1	8.73379
56	1	0	1	0	-1	17965.5	27.43192
57	3	0	-1	0	-1	-17834.2	9.09502
58	-2	0	-1	4	0	17550.4	-16.10216
59	2	0	-3	2	0	14500.3	12.63914
60	6	0	-1	-4	0	-13871.5	4.78922

Tabla 2.4: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_i^1 \times 10^{-9} \text{ (rad)}$	PERÍODO (días)
61	0	0	3	-2	0	-13647.5	-169.00171
62	-3	1	1	2	0	13527.2	-9.60014
63	-1	0	1	1	0	-12369.6	-29.40287
64	4	-1	-1	-1	0	10513.2	6.96844
65	1	0	-1	1	0	10429.1	25.32536
66	-3	3	1	0	0	7360.7	-9.17246
67	1	-3	1	2	0	-7268.7	24.38937
68	3	-3	1	0	0	7033.0	9.19728
69	1	1	-1	1	-1	-7011.7	25.12851
70	1	1	-1	-1	1	7011.7	29.13764
71	0	-2	-1	4	0	6550.5	95.42146
72	5	-1	1	-4	0	-6260.9	5.82760
73	-1	-1	1	1	1	5899.5	-29.13786
74	-1	-1	1	3	-1	-5899.4	-34.66919
75	1	1	1	-1	-1	-5705.4	29.38979
76	1	1	1	-3	1	5705.0	35.02644
77	-1	3	1	-2	0	-5674.9	-24.21562
78	3	1	-1	-3	1	-5596.5	9.79948
79	3	1	-1	-1	-1	5596.4	9.30044
80	0	0	-1	3	-1	-5213.0	119.60734
81	0	0	-1	1	1	5209.2	346.60436
82	1	-1	-1	1	1	-5103.0	25.52532
83	1	-1	-1	3	-1	5102.5	22.39524
84	5	-3	1	-2	0	-4907.6	5.66719
85	4	-2	-1	1	-1	4765.3	6.72629
86	4	-2	-1	-1	1	-4765.2	6.98349
87	2	0	1	-3	1	-4554.1	15.42222
88	2	0	1	-1	-1	4550.2	14.22130
89	0	1	1	-1	0	-4258.2	-388.26675
90	-1	-1	3	0	0	-4066.5	-26.77244
91	0	-2	3	0	0	-4037.7	-943.22731
92	2	-1	1	-1	0	-3913.8	14.28413
93	-3	-1	1	4	0	-3781.7	-10.06966
94	5	1	-3	-2	0	-3686.3	5.60914
95	-1	0	1	0	1	3562.7	-27.21232
96	3	3	-1	-4	0	3505.8	10.00729
97	1	0	-1	0	1	-3433.0	27.21212
98	6	-2	-3	0	0	-3371.1	4.55728
99	2	2	-3	0	0	3290.4	13.46577
100	-4	2	1	2	0	-3150.8	-7.11963
101	4	0	-1	-1	-1	3051.8	6.95345
102	4	0	-1	-3	1	-3047.9	7.22868
103	7	-3	-1	-2	0	-2758.4	4.00079
104	4	-1	-1	0	-1	-2750.6	6.83798
105	6	0	-3	-2	0	-2699.4	4.66044
106	-2	0	1	1	1	2450.3	-14.16205
107	2	1	-1	-1	0	-2448.0	14.10023
108	-2	0	1	3	-1	-2446.4	-15.35256
109	-1	1	3	-2	0	2329.8	-23.69177
110	7	-5	-1	0	0	-2174.5	3.92453
111	1	3	1	-4	0	2091.6	37.83474
112	4	-4	-1	2	0	-2018.1	6.63176
113	-3	-1	3	2	0	2001.6	-9.51672
114	2	-1	-1	1	0	1995.1	13.19649
115	-4	0	1	4	0	-1784.5	-7.37464
116	0	1	1	0	-1	1572.3	6164.10044
117	3	-1	-3	2	0	1536.3	8.66469
118	7	-1	-1	-4	0	-1528.3	4.08007
119	0	1	-1	1	0	-1402.8	313.04221
120	2	1	1	-3	0	-1392.3	15.34900

Tabla 2.4: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_1^1 \times 10^{-9}$ (rad)	PERÍODO (días)
121	4	1	-1	-3	0	1363.2	7.21255
122	3	0	1	-3	0	1293.0	9.85780
123	1	1	-3	2	0	-1105.1	23.34940
124	5	1	1	-6	0	-1079.7	5.99735
125	4	2	1	-6	0	-1077.1	7.66584
126	1	-3	-1	4	0	1067.8	21.38056
127	-2	2	1	1	-1	-1043.9	-14.28722
128	-2	2	1	-1	1	1043.9	-13.25062
129	-4	0	3	2	0	910.7	-7.07364
130	2	-2	-1	1	1	-892.8	13.25057
131	2	-2	-1	3	-1	892.8	12.35422
132	3	-1	1	-3	1	-856.0	9.88795
133	3	-1	1	-1	-1	855.8	9.38010
134	0	-1	1	1	0	-855.2	438.33478
135	5	-2	-1	-1	0	809.7	5.56187
136	0	1	-1	0	1	789.8	2189.72290
137	2	-1	1	0	-1	787.5	13.74655
138	2	-1	-1	0	1	-770.8	13.69113
139	4	2	-3	-2	0	700.9	7.04281
140	-1	0	-1	3	0	-695.6	-35.41041
141	-2	2	3	-2	0	684.2	-12.73879
142	-1	-3	1	4	0	-673.8	-37.41826
143	0	2	-1	1	-1	-660.6	285.40598
144	0	2	-1	-1	1	660.6	-507.15692
145	5	-5	1	0	0	-655.3	5.51538
146	-5	5	1	0	0	-641.9	-5.50645
147	-2	2	-1	2	0	-636.2	-14.93420
148	-2	-2	1	4	0	-621.2	-15.86884
149	-4	2	3	0	0	-617.4	-6.83869
150	1	-1	3	-2	0	-608.4	32.92230
151	5	0	-1	-3	0	541.9	5.71628
152	7	-1	-3	-2	0	-528.7	3.98623
153	6	-2	1	-4	0	-516.4	4.81026
154	7	-3	-3	0	0	-513.7	3.91052
155	-3	1	-1	4	0	-490.7	-10.16311
156	-4	4	1	0	0	479.4	-6.88166
157	-5	3	1	2	0	-468.1	-5.65776
158	1	2	-1	-1	0	-464.1	28.87737
159	1	-3	3	0	0	-462.6	28.38373
160	6	-4	1	-2	0	-456.7	4.70044
161	1	1	3	-4	0	-450.2	39.18858
162	5	-3	-1	1	-1	450.0	5.40652
163	5	-3	-1	-1	1	-450.0	5.57145
164	-3	5	-1	0	0	447.4	-9.24993
165	5	-1	-1	-1	-1	425.9	5.55231
166	5	-1	-1	-3	1	-425.4	5.72641
167	2	1	-1	0	-1	411.6	13.57614
168	1	0	-1	2	-1	410.4	23.68328
169	3	0	1	-2	-1	-395.4	9.59875
170	0	-1	1	0	1	394.5	-2190.97768
171	-2	1	1	0	1	-392.9	-13.69118
172	-3	0	1	3	0	385.7	-9.82930
173	0	-1	-1	3	0	-366.2	124.20250
174	4	-4	1	0	0	361.3	6.89562
175	-1	1	-1	1	1	325.2	-29.93428
176	-1	1	-1	3	-1	-325.1	-35.80257
177	2	2	-1	-1	-1	-324.5	14.03900
178	2	2	-1	-3	1	324.5	15.20806
179	-3	2	1	1	0	317.5	-9.38143
180	0	-2	1	1	1	309.1	507.08966

Tabla 2.4: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_i^1 \times 10^{-9}$ (rad)	PERÍODO (días)
181	0	-2	1	3	-1	-309.1	134.27153
182	6	0	1	-6	0	-304.1	4.92533
183	0	2	1	-1	-1	-303.1	-441.26237
184	0	2	1	-3	1	303.1	-129.16922
185	2	4	-1	-4	0	302.1	15.71450
186	-5	1	1	4	0	-292.9	-5.81762
187	-2	-1	1	3	0	289.5	-15.28000
188	-1	2	-1	1	0	-284.3	-30.21405
189	0	-1	-1	2	1	277.2	188.19672
190	-2	-1	1	2	1	-250.9	-14.66646
191	-2	0	3	1	-1	-249.2	-14.10323
192	-2	0	3	-1	1	249.2	-13.09222
193	4	1	-1	-2	-1	-245.2	7.07289
194	6	2	-1	-6	0	-244.0	4.90328
195	1	-1	-3	4	0	243.8	20.97115
196	2	1	1	-2	-1	241.0	14.73001
197	4	0	-3	1	-1	240.2	6.68523
198	4	0	-3	-1	1	-240.2	6.93924
199	8	-4	-1	-2	0	-235.2	3.49354
200	-4	-2	1	6	0	-232.1	-7.64860
201	-2	4	-1	0	0	216.4	-13.92422
202	1	-2	1	1	0	210.9	25.92486
203	3	3	1	-6	0	210.4	10.62055
204	3	-2	1	-1	0	206.7	9.40739
205	0	2	-3	2	0	-199.5	152.99858
206	2	-4	-1	4	0	197.4	12.03904
207	-2	-2	-1	6	0	196.5	-17.46830
208	-5	3	3	0	0	194.6	-5.47890
209	-1	0	-1	2	1	193.9	-32.28091
210	-1	-3	-1	6	0	191.9	-47.72150
211	4	-1	1	-3	0	190.6	7.26036
212	-3	-3	1	6	0	-189.0	-10.58747
213	5	-5	-1	2	0	-188.7	5.34527
214	5	-2	-1	0	-1	-188.6	5.47844
215	0	4	1	-4	0	-184.5	-101.41048
216	2	0	3	-4	0	-184.0	16.17880
217	1	0	1	-2	1	-179.9	32.28064
218	4	-2	-3	2	0	-169.6	6.59184
219	0	4	-1	-2	0	168.8	-244.44451
220	-3	3	-1	2	0	-165.9	-9.68504
221	5	3	-1	-6	0	-161.2	5.96468
222	-2	-2	3	2	0	-160.5	-14.53772
223	-3	2	1	0	1	-147.8	-9.14651
224	-1	-1	-1	3	1	138.2	-35.02676
225	-1	-1	-1	5	-1	-138.2	-43.33874
226	2	-2	3	-2	0	136.5	15.00011
227	5	0	-1	-2	-1	-134.5	5.62820
228	-3	3	1	1	-1	-133.3	-9.40873
229	-3	3	1	-1	1	133.3	-8.94776
230	8	-6	-1	0	0	-133.1	3.43526
231	3	1	1	-3	-1	127.2	9.82785
232	3	1	1	-5	1	-127.2	10.38678
233	-1	2	1	-1	0	126.1	-25.72864
234	7	1	-1	-6	0	-125.9	4.16256
235	-3	1	1	1	1	125.8	-9.35428
236	-3	1	1	3	-1	-125.5	-9.85927
237	-3	0	1	2	1	-123.5	-9.57172
238	1	2	-1	0	-1	114.0	26.76160
239	3	2	-1	-3	0	-110.4	9.76986
240	8	-2	-1	-4	0	-107.0	3.55385

Tabla 2.4: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_1^1 \times 10^{-9}$ (rad)	PERÍODO (días)
241	-1	0	1	2	-1	102.2	-31.97697
242	-4	2	-1	4	0	-96.9	-7.42463
243	-5	-1	1	6	0	-96.8	-5.98678
244	-1	2	-1	0	1	96.5	-27.90570
245	3	3	-3	-2	0	92.8	9.46099
246	3	0	-1	-2	1	90.5	9.57169
247	8	-4	-3	0	0	-86.9	3.42451
248	4	-2	1	-1	-1	85.9	6.99788
249	4	-2	1	-3	1	-85.9	7.27671
250	0	-1	1	2	-1	84.3	199.23732
251	2	1	-1	-2	1	82.5	14.66640
252	2	-2	1	1	-1	-80.8	13.30248
253	2	-2	1	-1	1	80.8	14.34753
254	0	-4	1	4	0	-77.5	104.52896
255	1	-2	-1	3	0	-76.4	22.55147
256	0	1	1	-2	1	-74.4	-188.20598
257	5	-1	-3	1	-1	73.7	5.37996
258	5	-1	-3	-1	1	-73.7	5.54325
259	3	-2	1	0	-1	-73.1	9.17118
260	-2	4	1	-2	0	-72.4	-12.88871
261	3	-3	-1	1	1	-71.4	8.94774
262	3	-3	-1	3	-1	71.4	8.52983
263	4	0	1	-3	-1	69.7	7.24410
264	4	0	1	-5	1	-69.6	7.54330
265	6	-1	-1	-3	0	69.4	4.73416
266	6	-3	-1	-1	0	68.0	4.62776
267	1	3	-3	0	0	67.3	26.33606
268	-4	4	-1	2	0	-66.8	-7.16622
269	-1	-3	3	2	0	-62.8	-30.77403
270	6	-6	1	0	0	-59.9	4.59553
271	-6	6	1	0	0	-58.8	-4.58932
272	-1	0	3	-1	0	-58.7	-25.13808
273	5	0	-3	-1	0	58.0	5.53376
274	-5	1	3	2	0	56.6	-5.62868
275	1	-2	1	0	1	-55.7	27.90550
276	-2	0	-1	3	1	55.6	-15.42228
277	-2	0	-1	5	-1	-55.5	-16.84475
278	3	-5	1	2	0	-53.1	8.80400
279	-3	5	1	-2	0	-52.1	-8.78125
280	1	2	1	-3	0	-50.9	34.65101
281	2	-2	-3	4	0	49.1	11.90813
282	4	-1	1	-2	-1	-48.3	7.11886
283	7	1	-3	-4	0	-47.1	4.06493
284	-3	1	3	1	-1	-47.1	-9.32859
285	-3	1	3	-1	1	47.1	-8.87525
286	3	-3	1	1	-1	45.5	8.97138
287	3	-3	1	-1	1	-45.5	9.43485
288	2	2	1	-3	-1	-45.4	15.27647
289	2	2	1	-5	1	45.4	16.67095
290	-2	-2	1	3	1	45.4	-15.20812
291	-2	-2	1	5	-1	-45.4	-16.58958
292	2	-1	-1	2	-1	-45.2	12.73633
293	-4	0	-1	6	0	-44.2	-7.70239
294	-1	-2	1	3	0	44.0	-34.30135
295	8	-2	-3	-2	0	-43.9	3.48244
296	6	-4	-1	1	-1	43.2	4.51970
297	6	-4	-1	-1	1	-43.2	4.63439
298	-3	3	3	-2	0	-43.1	-8.71141
299	2	-4	3	0	0	-42.9	13.98150
300	-1	5	-1	-2	0	42.5	-24.76317

Tabla 2.4: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_i^1 \times 10^{-9}$ (rad)	PERÍODO (días)
301	-3	-1	-1	6	0	-42.1	-10.69082
302	4	2	-1	-3	-1	41.3	7.19649
303	4	2	-1	-5	1	-41.3	7.49170
304	-2	1	-1	3	0	40.0	-15.49621
305	0	0	-3	4	0	38.9	87.77382
306	6	2	-3	-4	0	-38.7	4.76837
307	5	1	-1	-3	-1	38.2	5.70619
308	5	1	-1	-5	1	-38.2	5.89023
309	7	-3	1	-4	0	-36.3	4.09533
310	3	1	-3	1	-1	-35.5	8.82676
311	3	1	-3	-1	1	35.5	9.27504
312	6	-2	-1	-1	-1	34.6	4.62114
313	6	-2	-1	-3	1	-34.6	4.74111
314	-3	-1	1	3	1	34.5	-9.79950
315	-3	-1	1	5	-1	-34.4	-10.35514
316	4	1	1	-5	0	33.5	7.52574
317	1	-2	-1	2	1	32.2	24.03544
318	-6	4	1	2	0	-31.3	-4.69395
319	0	-2	-1	3	1	-30.5	129.16485
320	0	-2	-1	5	-1	30.5	75.65669
321	-6	4	3	0	0	29.1	-4.57017
322	8	0	-1	-6	0	-27.1	3.61626
323	0	0	3	-1	-1	26.5	-314.53252
324	0	0	3	-3	1	-26.5	-115.54177
325	2	0	-3	1	1	26.5	13.09217
326	2	0	-3	3	-1	-26.5	12.21641
327	7	-5	1	-2	0	-25.0	4.01546
328	-4	3	1	1	0	24.7	-6.99862
329	7	-1	1	-6	0	-24.0	4.17844
330	1	2	1	-2	-1	23.4	31.64861
331	0	-4	-1	6	0	23.3	65.20294
332	-2	2	-1	1	1	21.5	-14.34758
333	-2	2	-1	3	-1	-21.4	-15.57084
334	-4	1	1	3	0	21.0	-7.24489
335	-5	5	-1	2	0	-20.7	-5.68714
336	3	-2	-1	0	1	-20.6	9.14648
337	1	0	1	1	-2	-20.2	25.51564
338	-1	0	1	-1	2	20.2	-25.32553
339	-2	1	-1	2	1	-20.1	-14.86553
340	1	0	-1	-1	2	-19.9	29.40264
341	3	0	-1	1	-2	19.9	8.87406
342	-1	2	1	0	-1	18.5	-27.67828
343	-1	0	3	0	-1	17.8	-26.99601
344	2	-1	1	-2	1	-17.7	14.86547
345	0	1	-1	2	-1	17.6	168.57050
346	5	-3	-3	2	0	17.5	5.31931
347	8	0	-3	-4	0	-17.5	3.54235
348	5	0	-3	0	-1	-17.4	5.45118
349	6	-1	-3	-1	0	16.8	4.60828
350	-4	6	-1	0	0	-16.6	-6.92518
351	4	4	-1	-6	0	16.5	7.61256
352	-5	3	-1	4	0	-16.0	-5.84869
353	1	-3	1	1	1	-15.9	26.13444
354	1	-3	1	3	-1	15.9	22.86276
355	4	-3	1	-1	0	15.9	7.01306
356	6	-3	-1	0	-1	-15.8	4.56986
357	6	-1	-1	-2	-1	-15.7	4.67359
358	9	-5	-1	-2	0	-15.7	3.10045
359	3	-3	3	-2	0	15.5	9.71271
360	1	3	-1	-1	-1	-15.2	28.62171

Tabla 2.4: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_i^1 \times 10^{-9}$ (rad)	PERÍODO (días)
361	1	3	-1	-3	1	15.2	33.94092
362	3	-5	-1	4	0	14.7	8.37838
363	-4	6	1	-2	0	-14.4	-6.65909
364	-1	3	-1	1	-1	-14.0	-30.49909
365	-1	3	-1	-1	1	14.0	-26.13462
366	-6	0	1	6	0	-12.9	-4.91820
367	5	-2	1	-3	0	12.7	5.74628
368	-3	0	3	1	0	-12.5	-9.30175
369	4	-3	-1	1	0	-12.4	6.74031
370	5	0	1	-5	0	12.3	5.91125
371	-1	1	-3	4	0	-12.0	-40.16269
372	-4	3	1	0	1	-11.9	-6.86705
373	-4	4	1	1	-1	-11.3	-7.01381
374	-4	4	1	-1	1	11.3	-6.75441
375	4	-1	-1	-2	1	11.2	7.10397
376	6	-6	-1	2	0	-11.1	4.47682
377	6	0	-1	-3	-1	11.0	4.72724
378	6	0	-1	-5	1	-11.0	4.85285
379	-1	2	1	-2	1	-10.8	-24.03559
380	2	-3	1	1	0	10.6	13.35744
381	-2	1	3	-1	0	-10.6	-13.14545
382	-3	0	-1	5	0	10.3	-10.42029
383	-2	1	1	2	-1	10.0	-14.80075
384	-3	2	-1	3	0	10.0	-9.91832
385	9	-7	-1	0	0	-9.9	3.05445
386	3	2	1	-5	0	-9.6	10.35351
387	-4	1	1	2	1	-9.5	-7.10398
388	4	1	-3	-1	0	-9.3	6.92438
389	5	3	-3	-4	0	9.3	5.76623
390	3	-2	-1	1	0	-9.2	8.92304
391	2	4	1	-6	0	9.0	17.28146
392	-6	2	1	4	0	-8.9	-4.80346
393	-3	-2	1	5	0	8.7	-10.32207
394	9	-3	-1	-4	0	-8.4	3.14785
395	9	-5	-3	0	0	-8.2	3.04596
396	-1	3	3	-4	0	8.2	-21.24691
397	5	2	-1	-5	0	8.0	5.87952
398	-1	-1	3	1	-1	7.9	-28.89000
399	-1	-1	3	-1	1	-7.9	-24.94412
400	5	-3	1	-1	-1	7.8	5.58061
401	5	-3	1	-3	1	-7.8	5.75651
402	0	-2	3	1	-1	7.7	596.09365
403	0	-2	3	-1	1	-7.7	-263.29866
404	2	-3	-1	3	0	-7.7	12.40161
405	5	-1	1	-3	-1	7.7	5.73608
406	5	-1	1	-5	1	-7.7	5.92208
407	-1	-2	-1	5	0	-7.5	-42.76544
408	-5	1	-1	6	0	-7.5	-6.01969
409	7	-4	-1	-1	0	7.1	3.96229
410	-4	0	1	3	1	7.0	-7.22869
411	-4	0	1	5	-1	-7.0	-7.52660
412	9	-3	-3	-2	0	-6.9	3.09170
413	1	0	3	-3	0	6.6	35.78318
414	6	2	1	-8	0	-6.6	5.04604
415	-6	2	3	2	0	-6.6	-4.67392
416	-2	3	-1	1	0	6.5	-14.41154
417	2	3	-1	-3	0	-6.4	15.13685
418	6	1	-1	-5	0	6.4	4.84558
419	-2	-1	-1	4	1	-6.3	-16.02236
420	-4	-2	-1	8	0	-6.3	-8.00173

Tabla 2.4: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_i^1 \times 10^{-9}$ (rad)	PERÍODO (días)
421	6	-2	-3	1	-1	6.2	4.50112
422	6	-2	-3	-1	1	-6.2	4.61486
423	1	5	-1	-4	0	-6.1	36.57132
424	4	1	1	-4	-1	-6.1	7.37382
425	4	-4	-1	1	1	-6.1	6.75440
426	4	-4	-1	3	-1	6.1	6.51350
427	-1	3	1	-1	-1	-6.1	-25.93504
428	-1	3	1	-3	1	6.1	-22.71002
429	2	-4	1	2	0	5.9	12.93776
430	-2	1	1	1	0	-5.7	-14.22436
431	-3	-1	3	1	1	5.6	-9.27506
432	-3	-1	3	3	-1	-5.6	-9.77131
433	-3	-3	-1	8	0	-5.6	-11.27633
434	2	2	3	-6	0	-5.5	17.55853
435	-4	-1	1	5	0	5.5	-7.50912
436	2	2	-3	1	-1	-5.4	12.98698
437	3	2	-1	-2	-1	5.4	9.51535
438	1	-3	-1	3	1	-5.2	22.70988
439	1	-3	-1	5	-1	5.2	20.19825
440	5	1	-3	-1	-1	5.2	5.52431
441	5	1	-3	-3	1	-5.2	5.69662
442	-4	4	3	-2	0	5.2	-6.61885
443	7	-2	-1	-3	0	5.1	4.04004
444	3	0	-3	1	0	5.0	8.85093
445	1	-2	1	2	-1	-4.9	24.20675
446	4	-6	1	2	0	-4.9	6.67216
447	5	3	1	-8	0	-4.9	6.17728
448	3	-5	3	0	0	-4.8	9.27517
449	-2	3	1	0	-1	4.8	-13.80814
450	6	-1	-3	0	-1	-4.6	4.55087
451	0	-4	3	2	0	-4.5	263.38521
452	4	-4	1	1	-1	4.5	6.76786
453	4	-4	1	-1	1	-4.5	7.02831
454	-2	3	1	-1	0	4.5	-13.30515
455	4	-3	1	0	-1	-4.4	6.88095
456	-4	2	1	1	1	4.4	-6.98351
457	-4	2	1	3	-1	-4.4	-7.26116
458	0	3	1	-3	0	4.3	-134.54497
459	1	2	-1	-2	1	4.3	31.35640
460	3	1	3	-6	0	-4.2	10.72455
461	-1	3	-3	2	0	-4.1	-33.60708
462	-1	-2	1	2	1	-4.1	-31.35666
463	-2	-1	-1	5	0	4.1	-16.75743
464	3	-3	-3	4	0	3.9	8.31477
465	-3	2	-1	2	1	-3.9	-9.65611
466	-2	-4	1	6	0	-3.8	-17.19405
467	-5	-1	3	4	0	-3.8	-5.78688
468	3	3	-1	-3	-1	-3.7	9.74043
469	3	3	-1	-5	1	3.7	10.28919
470	0	4	-3	0	0	-3.6	595.55775
471	6	0	-3	-1	-1	3.6	4.60172
472	6	0	-3	-3	1	-3.6	4.72067
473	-3	0	3	0	1	3.6	-9.07075
474	-2	1	3	0	-1	3.5	-13.63621
475	2	-1	-1	-1	2	-3.3	14.22431
476	3	0	-3	0	1	-3.3	9.07073
477	3	-1	3	-4	0	3.3	10.19358
478	4	-1	-1	1	-2	3.3	6.71232
479	1	-5	1	4	0	3.2	21.80627
480	5	0	1	-4	-1	-3.2	5.81711

Tabla 2.4: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_i^1 \times 10^{-9}$ (rad)	PERÍODO (días)
481	-5	7	-1	0	0	-3.1	-5.53427
482	7	1	1	-8	0	-3.0	4.26500
483	-4	0	3	1	1	3.0	-6.93926
484	-4	0	3	3	-1	-3.0	-7.21334
485	3	-2	-1	2	-1	-2.9	8.71026
486	4	-2	3	-4	0	2.9	7.44089
487	5	-2	1	-2	-1	-2.9	5.65727
488	-3	0	-1	4	1	-2.9	-10.13126
489	0	-1	3	-1	0	2.8	-286.64425
490	7	-5	-1	1	-1	2.8	3.88281
491	7	-5	-1	-1	1	-2.8	3.96716
492	-1	0	-1	4	-1	2.7	-39.21184
493	2	-3	1	0	1	-2.6	13.86446
494	-1	5	1	-4	0	-2.6	-21.66727
495	4	1	-3	0	-1	2.4	6.79556
496	8	-4	1	-4	0	-2.4	3.56541
497	9	-1	-3	-4	0	-2.4	3.13883
498	-2	3	-1	0	1	-2.4	-13.86451
499	-5	-1	-1	8	0	-2.4	-6.20099
500	3	0	1	-4	1	2.3	10.13123
501	7	-3	-1	-1	-1	2.3	3.95744
502	7	-3	-1	-3	1	-2.3	4.04510
503	-1	1	3	-1	-1	-2.3	-25.33508
504	-1	1	3	-3	1	2.3	-22.24866
505	-6	0	3	4	0	-2.3	-4.78249
506	9	-1	-1	-6	0	-2.2	3.19673
507	2	1	-3	1	0	-2.1	13.03937
508	4	1	-1	-4	1	2.1	7.35784
509	7	-7	1	0	0	-2.1	3.93864
510	-2	-1	1	4	-1	2.1	-15.94712
511	2	-3	-1	2	1	2.0	12.83748
512	4	-1	-3	1	0	2.0	6.69908
513	-7	7	1	0	0	-2.0	-3.93409
514	1	0	3	-2	-1	-1.9	32.59041
515	1	1	-3	1	1	-1.9	24.94395
516	1	1	-3	3	-1	1.9	21.94646
517	1	-2	3	-1	0	1.9	30.48501
518	3	0	-3	2	-1	1.9	8.64153
519	-3	3	-1	1	1	1.9	-9.43487
520	-3	3	-1	3	-1	-1.9	-9.94884
521	-2	4	1	-1	-1	-1.8	-13.36014
522	-2	4	1	-3	1	1.8	-12.44941
523	-7	3	1	4	0	1.8	-4.09040
524	1	0	-3	3	0	-1.7	22.09646
525	2	-4	1	1	1	-1.7	13.41286
526	2	-4	1	3	-1	1.7	12.49518
527	7	-4	-1	0	-1	-1.6	3.91977
528	-2	3	1	-2	1	-1.6	-12.83753
529	1	-2	-1	4	-1	-1.5	21.24008
530	3	2	-3	-1	0	-1.5	9.24850
531	4	-4	3	-2	0	1.5	7.18135
532	-4	1	3	1	0	-1.4	-6.95418
533	5	-5	1	1	-1	1.3	5.43334
534	5	-5	1	-1	1	-1.3	5.59994
535	6	1	-3	-3	0	1.3	4.71379
536	7	0	-1	-5	0	1.3	4.12090
537	8	-2	1	-6	0	-1.3	3.62824
538	8	-6	1	-2	0	-1.3	3.50472
539	-1	4	-1	-1	0	1.3	-26.34761
540	-1	-5	1	6	0	1.3	-45.72890

Tabla 2.4: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_i^1 \times 10^{-9}$ (rad)	PERÍODO (días)
541	-2	4	-1	1	-1	-1.3	-14.47607
542	-2	4	-1	-1	1	1.3	-13.41290
543	-2	-2	-1	5	1	1.3	-16.67102
544	-2	-2	-1	7	-1	-1.3	-18.34567
545	-3	4	-1	1	0	1.3	-9.46249
546	0	4	1	-5	1	-1.2	-79.37331
547	0	-1	3	0	-1	-1.2	-1331.79491
548	2	1	-3	0	1	1.2	13.52209
549	2	3	-1	-2	-1	1.2	14.53452
550	3	5	-1	-6	0	1.2	10.51854
551	4	2	1	-5	-1	1.2	7.50827
552	4	2	1	-7	1	-1.2	7.83018
553	5	2	-1	-4	-1	-1.2	5.78638
554	6	-1	1	-5	0	1.2	4.86712
555	-1	-2	1	4	-1	1.2	-37.85642
556	-3	-2	1	4	1	-1.2	-10.03839
557	0	1	1	1	-2	-1.1	344.82661
558	0	1	-1	-1	2	1.1	-438.38503
559	0	-1	1	-1	2	1.1	-313.06785
560	1	2	1	-4	1	-1.1	38.28277
561	1	3	1	-3	-1	-1.1	34.28355
562	1	3	1	-5	1	1.1	42.20664
563	1	-1	3	-1	-1	1.1	30.20023
564	1	-1	3	-3	1	-1.1	36.18368
565	1	-5	-1	6	0	1.1	19.36919
566	2	1	-1	1	-2	-1.1	13.08962
567	2	-1	1	1	-2	-1.1	13.24796
568	3	2	1	-4	-1	1.1	10.06813
569	3	2	-1	-4	1	1.1	10.03837
570	4	-1	-3	0	1	-1.1	6.82424
571	6	-3	1	-3	0	1.1	4.75472
572	7	-2	-3	-1	0	1.1	3.94801
573	-2	1	1	-1	2	1.1	-13.19653
574	-4	-1	1	4	1	-1.1	-7.35785
575	-5	4	1	1	0	1.1	-5.58108
576	0	-3	1	2	1	1.0	227.24727
577	0	-3	-1	5	0	-1.0	77.46967
578	1	5	1	-6	0	-1.0	46.35247
579	4	2	-3	-1	-1	-1.0	6.90958
580	4	2	-3	-3	1	1.0	7.18128
581	4	4	-3	-4	0	1.0	7.29225
582	4	-3	-1	0	1	1.0	6.86703
583	5	1	1	-5	-1	1.0	5.90046
584	5	1	1	-7	1	-1.0	6.09746
585	6	1	-1	-4	-1	-1.0	4.78214
586	7	-2	-1	-2	-1	-1.0	3.99585
587	-1	-3	1	3	1	1.0	-33.94122
588	-1	-3	1	5	-1	-1.0	-41.68900
589	10	-4	-3	-2	0	-1.0	2.77980
590	1	-3	3	1	-1	0.9	26.33711
591	1	-3	3	-1	1	-0.9	30.77522
592	2	-6	1	4	0	0.9	12.17285
593	4	-2	-3	1	1	-0.9	6.71299
594	4	-2	-3	3	-1	0.9	6.47499
595	7	-1	-1	-3	-1	0.9	4.03500
596	7	-1	-1	-5	1	-0.9	4.12616
597	7	-3	-3	1	-1	0.9	3.86909
598	7	-3	-3	-1	1	-0.9	3.95284
599	7	-7	-1	2	0	-0.9	3.85112
600	-3	1	-1	3	1	0.9	-9.88798

Tabla 2.4: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_i^1 \times 10^{-9}$ (rad)	PERÍODO (días)
601	-3	1	-1	5	-1	-0.9	-10.45398
602	-3	5	-1	1	-1	-0.9	-9.49026
603	-3	5	-1	-1	1	0.9	-9.02147
604	-3	-1	-1	5	1	0.9	-10.38681
605	-3	-1	-1	7	-1	-0.9	-11.01316
606	-5	7	1	-2	0	-0.9	-5.36302
607	4	3	-1	-5	0	-0.8	7.47438
608	5	-2	-1	-2	1	0.8	5.64787
609	-1	-2	-1	4	1	0.8	-38.28316
610	-2	2	3	-1	-1	-0.8	-13.19912
611	-2	2	3	-3	1	0.8	-12.30948
612	-2	2	-3	4	0	-0.8	-16.34244
613	-2	4	3	-4	0	-0.8	-11.99655
614	-3	4	1	0	-1	0.8	-9.19856
615	-3	4	1	-1	0	-0.8	-8.97259
616	-5	4	1	0	1	-0.8	-5.49708
617	-5	5	3	-2	0	0.8	-5.33688
618	-7	3	3	2	0	0.8	-3.99609
619	10	-6	-1	-2	0	-0.8	2.78687
620	0	3	1	-2	-1	0.7	-213.00704
621	0	3	-1	0	-1	-0.7	929.95080
622	1	-1	-3	3	1	0.7	22.24853
623	1	-1	-3	5	-1	-0.7	19.83248
624	2	-1	-3	3	0	-0.7	12.26275
625	3	-1	-3	1	1	0.7	8.87523
626	3	-1	-3	3	-1	-0.7	8.46391
627	3	-2	1	-2	1	0.7	9.65609
628	4	0	3	-6	0	-0.7	7.71988
629	4	-4	-3	4	0	0.7	6.38735
630	7	0	-3	-3	0	0.7	4.02519
631	7	-1	-3	-1	-1	0.7	3.94319
632	7	-1	-3	-3	1	-0.7	4.03021
633	-5	0	1	5	0	0.7	-5.90099
634	0	0	-1	0	2	0.6	6786.31719
635	0	1	3	-3	0	-0.6	-119.82426
636	0	-1	-1	4	-1	0.6	92.68574
637	1	0	1	-3	2	-0.6	35.41009
638	1	0	-1	3	-2	-0.6	22.24117
639	1	1	3	-3	-1	0.6	35.39145
640	1	1	3	-5	1	-0.6	43.89843
641	1	-2	3	0	-1	-0.6	28.13669
642	2	0	1	0	-2	0.6	13.68835
643	3	0	1	-1	-2	0.6	9.35296
644	4	0	-1	0	-2	-0.6	6.82355
645	6	-4	1	-1	-1	0.6	4.64072
646	6	-4	1	-3	1	-0.6	4.76172
647	-1	0	-1	1	2	0.6	-29.65965
648	-1	-2	3	1	0	0.6	-28.63411
649	-2	0	1	0	2	-0.6	-13.63344
650	-3	2	1	2	-1	0.6	-9.62874
651	-3	7	-1	-2	0	-0.6	-8.85223
652	-5	3	3	1	-1	-0.6	-5.56233
653	-5	3	3	-1	1	0.6	-5.39793
654	-6	6	-1	2	0	-0.6	-4.71416
655	-7	5	1	2	0	0.6	-4.01072
656	10	-4	-1	-4	0	-0.6	2.82511
657	10	-6	-3	0	0	-0.6	2.74277
658	10	-8	-1	0	0	-0.6	2.74965
659	0	3	-1	-1	0	0.5	-601.52082
660	2	1	1	-4	1	0.5	16.02229

Tabla 2.4: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_i^1 \times 10^{-9}$ (rad)	PERÍODO (días)
661	3	2	-3	0	-1	0.5	9.02011
662	3	-4	-1	3	0	-0.5	8.55240
663	4	-6	-1	4	0	0.5	6.42482
664	5	-4	-1	1	0	-0.5	5.41557
665	5	-5	-1	1	1	-0.5	5.42466
666	5	-5	-1	3	-1	0.5	5.26818
667	6	-2	1	-3	-1	0.5	4.74774
668	6	-2	1	-5	1	-0.5	4.87445
669	7	-5	-3	2	0	-0.5	3.83763
670	8	0	1	-8	0	-0.5	3.69333
671	-1	0	3	-2	1	-0.5	-23.51941
672	-2	-1	3	1	0	0.5	-14.04198
673	-3	2	3	-1	0	0.5	-8.89968
374	-3	-3	3	4	0	-0.5	-9.97792
675	-5	2	1	3	0	-0.5	-5.73658
676	-5	2	3	1	0	0.5	-5.55278
677	-7	1	1	6	0	0.5	-4.17331
678	0	3	-1	-2	1	0.4	-227.26077
679	1	0	-3	2	1	0.4	23.51927
680	1	-5	3	2	0	-0.4	24.94489
681	2	-1	-3	2	1	0.4	12.68875
682	3	-4	1	1	0	-0.4	8.99634
683	4	-6	3	0	0	-0.4	6.93932
684	5	0	-1	-4	1	0.4	5.80716
685	5	-4	1	-1	0	0.4	5.59026
686	8	-5	-1	-1	0	0.4	3.46415
687	-1	2	-1	2	-1	-0.4	-32.93872
688	-1	-1	-3	6	0	-0.4	-49.89567
689	-2	6	1	-4	0	-0.4	-12.12941
690	-2	-2	3	1	1	-0.4	-13.98125
691	-2	-2	3	3	-1	0.4	-15.14032
692	-2	-4	-1	8	0	-0.4	-19.08774
693	-3	4	-1	0	1	-0.4	-9.22354
694	-4	3	-1	3	0	0.4	-7.29314
695	-5	0	3	3	0	0.4	-5.70669
696	-7	1	3	4	0	-0.4	-4.07518
697	0	1	-3	3	0	0.3	111.55157
698	0	2	-3	1	1	-0.3	263.28053
699	0	2	-3	3	-1	0.3	107.83081
700	0	-4	1	3	1	-0.3	146.43544
701	0	-4	1	5	-1	0.3	81.27105
702	1	2	-3	1	0	-0.3	24.75297
703	1	3	3	-6	0	-0.3	48.40101
704	1	-4	1	3	0	-0.3	23.02560
705	2	-2	3	-1	-1	-0.3	14.40840
706	2	-2	3	-3	1	0.3	15.64250
707	4	-1	-3	2	-1	0.3	6.57843
708	4	-3	-1	2	-1	-0.3	6.61819
709	5	2	-3	-3	0	-0.3	5.68660
710	5	-3	3	-4	0	0.3	5.85877
711	6	-1	1	-4	-1	-0.3	4.80311
712	7	0	-1	-4	-1	-0.3	4.07493
713	8	-3	-1	-3	0	0.3	3.52344
714	-1	4	-1	0	-1	-0.3	-28.39592
715	-3	0	1	4	-1	0.3	-10.10112
716	-3	-2	-1	7	0	0.3	-10.97577
717	-4	2	3	1	-1	0.3	-6.96918
718	-4	2	3	-1	1	-0.3	-6.71301
719	-4	-1	3	3	0	0.3	-7.19728
720	-5	0	1	4	1	-0.3	-5.80717

Tabla 2.4: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_i^1 \times 10^{-9}$ (rad)	PERÍODO (días)
721	-5	1	3	1	1	0.3	-5.54326
722	-5	1	3	3	-1	-0.3	-5.71678
723	-5	2	1	2	1	-0.3	-5.64788
724	-7	5	3	0	0	-0.3	-3.92000
725	0	0	-3	3	1	0.2	115.53828
726	0	0	-3	5	-1	-0.2	70.76792
727	0	6	-1	-4	0	-0.2	-111.75909
728	1	3	-3	1	-1	-0.2	24.56488
729	1	3	-3	-1	1	0.2	28.38251
730	1	4	-1	-3	0	0.2	33.58829
731	1	5	-3	-2	0	-0.2	30.19886
732	2	0	3	-3	-1	0.2	15.49257
733	2	0	3	-5	1	-0.2	16.92864
734	2	1	3	-5	0	0.2	16.84045
735	2	3	1	-5	0	-0.2	16.58541
736	2	4	-1	-3	-1	-0.2	15.06631
737	2	4	-1	-5	1	0.2	16.42098
738	2	4	-3	-2	0	-0.2	14.40808
739	2	-3	3	-1	0	0.2	14.47290
740	2	-4	-1	3	1	-0.2	12.44937
741	2	-4	-1	5	-1	0.2	11.65489
742	3	-2	-1	-1	2	-0.2	9.38145
743	3	-4	-1	2	1	0.2	8.75745
744	3	-5	1	1	1	-0.2	9.02145
745	3	-5	1	3	-1	0.2	8.59679
746	4	4	1	-8	0	0.2	7.96230
747	4	-1	1	-4	1	0.2	7.40761
748	5	2	1	-7	0	0.2	6.08598
749	5	-2	-1	1	-2	0.2	5.39749
750	5	-5	3	-2	0	0.2	5.69667
751	6	0	1	-5	-1	0.2	4.85980
752	6	0	1	-7	1	-0.2	4.99265
753	6	1	1	-7	0	0.2	4.98496
754	6	1	-3	-2	-1	-0.2	4.65373
755	6	-3	1	-2	-1	-0.2	4.69362
756	6	-4	-3	2	0	0.2	4.45860
757	6	-5	1	-1	0	0.2	4.64739
758	7	0	-3	-2	-1	-0.2	3.98132
759	7	-2	-3	0	-1	-0.2	3.90579
760	8	2	-3	-6	0	-0.2	3.60436
761	8	-3	-3	-1	0	0.2	3.45323
762	8	-8	1	0	0	-0.2	3.44606
763	-1	2	3	-3	0	-0.2	-22.40284
764	-1	-2	3	0	1	-0.2	-26.55255
765	-1	-3	3	1	1	-0.2	-28.38272
766	-1	-3	3	3	-1	0.2	-33.60537
767	-4	3	-1	2	1	-0.2	-7.15037
768	-4	-1	3	2	1	-0.2	-7.05820
769	-4	-2	3	4	0	-0.2	-7.32531
770	-5	2	3	0	1	-0.2	-5.46963
771	-5	3	1	1	1	0.2	-5.57146
772	-5	3	1	3	-1	-0.2	-5.74678
773	-5	5	1	1	-1	0.2	-5.59073
774	-5	5	1	-1	1	-0.2	-5.42467
775	-5	-3	3	6	0	-0.2	-5.95423
776	-6	0	-1	8	0	-0.2	-5.06185
777	-6	4	-1	4	0	-0.2	-4.82462
778	-6	-2	3	6	0	-0.2	-4.89622
779	-8	6	3	0	0	-0.2	-3.43179
780	-8	8	1	0	0	-0.2	-3.44257

Tabla 2.4: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_i^1 \times 10^{-9}$ (rad)	PERÍODO (días)
781	10	-2	-3	-4	0	-0.2	2.81784
782	0	1	-3	2	1	-0.1	160.59910
783	0	4	1	-3	-1	0.1	-140.38761
784	0	-3	1	3	0	-0.1	140.08995
785	1	2	-1	1	-2	-0.1	24.93470
786	1	-2	1	-1	2	-0.1	30.21381
787	1	-3	-3	6	0	0.1	19.03258
788	2	1	-3	2	-1	-0.1	12.58992
789	2	3	1	-4	-1	0.1	15.86503
790	2	-1	3	-3	0	0.1	15.56717
791	2	-2	-3	3	1	0.1	12.30944
792	2	-2	-3	5	-1	-0.1	11.53216
793	2	-3	-1	4	-1	-0.1	11.99437
794	3	3	-3	-1	-1	-0.1	9.22212
795	3	3	-3	-3	1	0.1	9.71257
796	3	-2	1	1	-2	0.1	8.94655
797	3	-2	3	-3	0	-0.1	9.94734
798	3	-2	-3	3	0	-0.1	8.48613
799	5	0	-3	-2	1	0.1	5.61889
800	6	-6	1	1	-1	0.1	4.53843
801	6	-6	1	-1	1	-0.1	4.65408
802	7	3	-3	-6	0	-0.1	4.14680
803	8	-1	-1	-5	0	0.1	3.58478
804	8	-1	-3	-3	0	0.1	3.51214
805	8	-4	-1	-1	-1	0.1	3.46045
806	8	-4	-1	-3	1	-0.1	3.52728
807	8	-4	-3	1	-1	0.1	3.39271
808	8	-4	-3	-1	1	-0.1	3.45692
809	8	-6	-1	1	-1	0.1	3.40325
810	8	-6	-1	-1	1	-0.1	3.46787
811	9	1	-3	-6	0	-0.1	3.18742
812	9	-5	1	-4	0	-0.1	3.15693
813	-1	2	-1	-1	2	0.1	-25.92504
814	-1	5	-1	-1	-1	-0.1	-26.56411
815	-1	5	-1	-3	1	0.1	-23.19092
816	-1	-3	-1	5	1	0.1	-42.20711
817	-1	-3	-1	7	-1	-0.1	-54.89337
818	-2	0	-3	6	0	-0.1	-17.75144
819	-2	1	-1	4	-1	0.1	-16.18276
820	-2	6	-3	0	0	-0.1	-14.10354
821	-3	0	3	2	-1	0.1	-9.54482
822	-3	4	1	-2	1	-0.1	-8.75747
823	-3	7	1	-4	0	-0.1	-8.42206
824	-4	0	-1	5	1	0.1	-7.54332
825	-4	0	-1	7	-1	-0.1	-7.86831
826	-4	1	-1	4	1	-0.1	-7.40762
827	-4	1	-1	5	0	0.1	-7.56096
828	-4	5	-1	1	0	0.1	-7.04364
829	-4	-1	-1	7	0	0.1	-7.84921
830	-5	0	3	2	1	-0.1	-5.61890
831	-6	2	-1	6	0	0.1	-4.94039
832	-7	-1	3	6	0	-0.1	-4.15747
833	-8	4	1	4	0	0.1	-3.56168
834	10	-2	-1	-6	0	-0.1	2.86441

Tabla 2.5: Desarrollo de $\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^3 P_{22}(\sin \beta_M) \cos 2\lambda_m$.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_i^2 \times 10^{-9} \text{ (rad)}$	PERÍODO (días)
1	2	0	0	0	0	2941390722.0	13.66079
2	3	-1	0	0	0	563951087.4	9.13293
3	3	1	0	-2	0	111147523.5	9.55685
4	1	1	0	0	0	-83480845.1	27.09252
5	4	0	0	-2	0	67478931.6	7.09579
6	4	-4	0	0	0	39737572.6	6.88864
7	0	2	0	0	0	-35987102.8	1615.74782
8	1	-1	0	2	0	22372376.8	23.94208
9	2	0	0	1	-1	-11028801.2	13.16829
10	2	0	0	-1	1	11028799.8	14.19156
11	5	-1	0	-2	0	9596104.2	5.64270
12	0	0	2	0	0	6009605.5	-3399.19183
13	4	0	-2	0	0	5715139.5	6.81670
14	5	-3	0	0	0	5675819.1	5.49218
15	2	2	0	-2	0	-5666883.0	14.63159
16	-1	1	0	2	0	-3944792.8	-32.45086
17	-1	3	0	0	0	-2909146.5	-28.03261
18	2	-2	0	2	0	2372668.2	12.81080
19	3	-1	0	1	-1	-2113971.0	8.91014
20	3	-1	0	-1	1	2113960.2	9.36715
21	3	0	0	-1	0	-1859739.6	9.34009
22	5	-1	-2	0	0	1760218.9	5.46477
23	5	1	0	-4	0	1522551.5	5.80170
24	4	2	0	-4	0	1482684.5	7.34907
25	1	3	0	-2	0	-1421782.6	31.19770
26	3	1	-2	0	0	-847944.7	9.05740
27	6	-4	0	0	0	847523.9	4.57941
28	6	-2	0	-2	0	694356.3	4.68358
29	0	-2	0	4	0	-619871.2	96.77985
30	3	0	0	0	-1	561703.1	9.10720
31	-1	-1	0	4	0	-530218.5	-38.52241
32	-1	1	2	0	0	484717.8	-27.33298
33	1	-1	2	0	0	482360.0	27.77974
34	6	0	0	-4	0	477078.6	4.79260
35	0	0	0	2	0	-372734.5	182.62109
36	2	0	-2	2	0	-334376.0	12.66268
37	1	1	0	-1	1	-312402.0	29.26306
38	1	1	0	1	-1	312384.2	25.22174
39	1	-1	0	1	1	270040.6	25.62152
40	1	-1	0	3	-1	-270021.8	22.46926
41	1	0	0	1	0	256472.8	25.42006
42	3	1	0	-1	-1	-249360.5	9.31318
43	3	1	0	-3	1	249351.1	9.81362
44	-2	4	0	0	0	-241738.1	-13.89576
45	1	1	2	-2	0	228708.9	32.11247
46	2	0	2	-2	0	-223599.0	14.82971
47	4	-1	0	-1	0	-219923.7	6.97559
48	5	1	-2	-2	0	205240.3	5.61377
49	6	-2	-2	0	0	187442.4	4.56034
50	-2	0	0	4	0	-164762.1	-16.06411
51	6	0	-2	-2	0	156495.9	4.66364
52	4	-2	0	1	-1	-148153.6	6.73295
53	4	-2	0	-1	1	148152.8	6.99067
54	4	0	0	-1	-1	-135806.5	6.96057
55	4	0	0	-3	1	135633.8	7.23637
56	4	-1	0	0	-1	135210.6	6.84487
57	0	2	0	-1	1	-134736.7	-471.94965
58	0	2	0	1	-1	134735.4	297.91279
59	0	1	0	1	0	132762.8	328.15251
60	3	3	0	-4	0	-117957.2	10.02205

Tabla 2.5: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_i^2 \times 10^{-9}$ (rad)	PERÍODO (días)
61	3	-3	0	2	0	-113675.9	8.74502
62	2	2	-2	0	0	-110744.1	13.49249
63	1	-3	0	4	0	-106240.7	21.44801
64	-2	2	2	0	0	-102496.9	-13.72166
65	2	-2	2	0	0	-102475.0	13.83334
66	0	4	0	-2	0	-94333.2	-235.96026
67	0	0	0	1	1	79702.0	365.22475
68	0	0	0	3	-1	-79531.4	121.74933
69	1	0	0	0	1	-79224.6	27.32148
70	7	-3	0	-2	0	75156.2	4.00315
71	2	-1	0	1	0	-68379.4	13.22215
72	7	-5	0	0	0	58870.6	3.92680
73	-2	2	0	2	0	-50517.4	-14.90147
74	7	-1	0	-4	0	49608.7	4.08252
75	4	1	0	-3	0	-49350.1	7.22021
76	-1	-1	2	2	0	45361.1	-31.51698
77	3	-1	2	-2	0	-43449.2	9.64098
78	2	-2	0	1	1	42577.8	13.27645
79	2	-2	0	3	-1	-42577.4	12.37671
80	2	1	0	-1	0	-41631.5	14.12953
81	4	2	-2	-2	0	-37679.0	7.05011
82	3	-1	-2	2	0	-37527.8	8.67575
83	7	-1	-2	-2	0	33128.1	3.98857
84	0	1	0	0	1	30550.4	3230.13064
85	-3	5	0	0	0	-29702.8	-9.23736
86	0	-1	0	3	0	-25826.0	126.51384
87	0	0	2	1	-1	-22522.6	409.23379
88	0	0	2	-1	1	22522.6	-329.81899
89	7	-3	-2	0	0	21971.8	3.91277
90	2	-1	0	0	1	-21858.9	13.71876
91	4	0	-2	-1	1	21443.5	6.94633
92	4	0	-2	1	-1	-21443.4	6.69181
93	2	4	0	-4	0	-20344.0	15.75091
94	5	0	0	-3	0	-19992.8	5.72109
95	1	1	-2	2	0	19891.2	23.42987
96	-1	2	0	1	0	19866.9	-30.08036
97	0	2	2	-2	0	17526.4	-194.13338
98	5	-1	0	-1	-1	-17442.5	5.55685
99	5	-1	0	-3	1	17414.2	5.73124
100	-1	0	0	3	0	17130.0	-35.22693
101	2	2	0	-3	1	-15388.4	15.24216
102	2	2	0	-1	-1	15388.1	14.06805
103	-3	1	0	4	0	-14217.8	-10.14794
104	2	1	0	0	-1	13110.5	13.60331
105	5	-3	0	1	-1	-12073.5	5.41082
106	5	-3	0	-1	1	12073.5	5.57602
107	0	-1	0	2	1	-11684.4	193.55481
108	-1	3	0	1	-1	11226.9	-30.36287
109	-1	3	0	-1	1	-11226.9	-26.03454
110	4	1	0	-2	-1	11123.0	7.08025
111	6	2	0	-6	0	10812.0	4.90682
112	5	-2	0	-1	0	-10181.6	5.56642
113	3	1	2	-4	0	-10177.2	10.11461
114	-2	-2	0	6	0	-9845.7	-17.42353
115	-1	-3	0	6	0	-9438.1	-47.38885
116	1	2	0	-1	0	9117.4	29.00055
117	5	-2	0	0	-1	8781.7	5.48286
118	-1	5	0	-2	0	-8641.4	-24.67330
119	2	-4	0	4	0	-8363.5	12.06040
120	-3	3	2	0	0	-8341.1	-9.16010

Tabla 2.5: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_i^2 \times 10^{-9} \text{ (rad)}$	PERÍODO (días)
121	3	-3	2	0	0	-8312.3	9.20974
122	-1	1	0	1	1	-8259.3	-29.80306
123	-1	1	0	3	-1	8249.7	-35.61501
124	-3	1	2	2	0	-8086.3	-9.58660
125	4	-4	0	2	0	7529.0	6.63824
126	8	-4	0	-2	0	7485.2	3.49534
127	5	0	0	-2	-1	7182.1	5.63286
128	5	3	0	-6	0	7168.1	5.96992
129	5	-1	-2	1	-1	-6602.0	5.38422
130	5	-1	-2	-1	1	6602.0	5.54777
131	5	-5	0	2	0	6355.8	5.34948
132	4	0	2	-4	0	-6349.2	7.39872
133	7	1	0	-6	0	5502.8	4.16511
134	0	2	-2	2	0	5474.5	156.52111
135	2	-1	0	2	-1	4717.2	12.76024
136	-2	0	2	2	0	4710.3	-14.70143
137	1	0	0	2	-1	4520.0	23.76607
138	3	0	0	-2	1	-4422.6	9.58519
139	3	-2	0	0	1	-4116.0	9.15881
140	8	-4	-2	0	0	4045.9	3.42624
141	1	3	-2	0	0	4002.7	26.43848
142	-1	3	2	-2	0	-3997.5	-24.12968
143	3	3	-2	-2	0	-3777.3	9.47418
144	1	0	2	-1	0	-3776.4	29.78939
145	-3	-1	0	6	0	-3741.7	-10.67403
146	5	0	-2	-1	0	-3667.3	5.53827
147	8	-6	0	0	0	3663.4	3.43699
148	3	-2	0	1	0	3560.7	8.93477
149	1	-1	-2	4	0	-3453.9	21.03604
150	8	-2	-2	-2	0	3313.5	3.48422
151	2	2	2	-4	0	3254.8	15.98075
152	7	1	-2	-4	0	3244.7	4.06736
153	1	3	0	-1	-1	3173.8	28.74272
154	1	3	0	-3	1	-3173.8	34.11122
155	3	1	-2	1	-1	3160.0	8.83824
156	3	1	-2	-1	1	-3160.0	9.28771
157	2	1	0	-2	1	-3137.8	14.69811
158	-1	0	0	2	1	-3056.3	-32.12836
159	-3	3	0	2	0	-2867.5	-9.67126
160	-4	2	0	4	0	2840.0	-7.41653
161	8	-2	0	-4	0	2700.5	3.55570
162	6	2	-2	-4	0	2587.1	4.77172
163	0	-2	0	3	1	2162.8	131.66643
164	0	-2	0	5	-1	-2162.6	76.50812
165	1	-2	0	3	0	2076.5	22.62652
166	3	-3	0	1	1	1938.8	8.95953
167	3	-3	0	3	-1	-1938.8	8.54055
168	4	-2	2	-2	0	-1930.4	7.14207
169	1	-2	0	2	1	-1838.1	24.12071
170	4	2	0	-3	-1	-1837.8	7.20412
171	4	2	0	-5	1	1837.8	7.49997
172	-1	1	2	1	-1	-1817.4	-29.54379
173	-1	1	2	-1	1	1817.4	-25.43001
174	1	-1	2	1	-1	-1786.6	25.81629
175	1	-1	2	-1	1	1786.6	30.06643
176	2	-2	-2	4	0	-1734.8	11.92903
177	5	1	0	-3	-1	-1703.0	5.71099
178	5	1	0	-5	1	1701.7	5.89534
179	1	2	0	0	-1	-1662.2	26.86736
180	6	-1	0	-3	0	-1649.5	4.73746

Tabla 2.5: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_i^2 \times 10^{-9}$ (rad)	PERÍODO (días)
181	4	-2	-2	2	0	1614.2	6.59824
182	3	-2	0	2	-1	1456.5	8.72143
183	-1	-1	0	3	1	1329.8	-34.84722
184	-1	-1	0	5	-1	-1328.5	-43.06421
185	-2	2	0	1	1	-1326.9	-14.31737
186	-2	2	0	3	-1	1325.9	-15.53526
187	8	0	-2	-4	0	1257.9	3.54420
188	-4	6	0	0	0	-1228.0	-6.91813
189	1	-3	2	2	0	-1185.0	24.47719
190	6	-1	0	-2	-1	1177.9	4.67680
191	-4	4	0	2	0	1165.8	-7.15867
192	-3	-1	2	4	0	-1158.5	-10.05477
193	1	0	2	0	-1	1146.6	27.54306
194	6	-3	0	-1	0	-1144.2	4.63091
195	-2	-2	2	4	0	-1137.9	-15.83189
196	8	0	0	-6	0	1137.7	3.61819
197	2	0	-2	3	-1	1132.7	12.23841
198	2	0	-2	1	1	-1132.4	13.11743
199	0	-4	0	6	0	1127.6	65.83435
200	5	0	-2	0	-1	1092.3	5.45555
201	3	-5	0	4	0	-1086.1	8.38872
202	1	2	0	-2	1	1053.3	31.50170
203	2	0	2	-3	1	-1039.7	15.45728
204	2	0	2	-1	-1	1039.3	14.25111
205	-2	3	0	1	0	988.1	-14.38105
206	-2	1	0	3	0	976.6	-15.46096
207	6	-4	0	1	-1	-970.1	4.52271
208	6	-4	0	-1	1	970.1	4.63755
209	-2	4	0	1	-1	931.9	-14.44531
210	-2	4	0	-1	1	-931.9	-13.38649
211	-4	2	2	2	0	-927.0	-7.11218
212	1	5	0	-4	0	-913.9	36.76912
213	1	0	0	-1	2	888.3	29.53036
214	3	0	0	1	-2	-888.3	8.88565
215	0	4	-2	0	0	865.9	652.73960
216	6	-2	0	-1	-1	-860.9	4.62428
217	6	-2	0	-3	1	859.9	4.74442
218	6	-1	-2	-1	0	-843.9	4.61141
219	6	-3	0	0	-1	811.3	4.57293
220	3	2	0	-3	0	805.5	9.78392
221	4	4	0	-6	0	-797.2	7.62109
222	5	-3	-2	2	0	-791.6	5.32348
223	3	0	-2	1	0	764.3	8.86247
224	6	-2	-2	1	-1	-703.4	4.50411
225	6	-2	-2	-1	1	703.4	4.61800
226	-4	4	2	0	0	-691.9	-6.87471
227	4	-1	0	-2	1	-689.7	7.11140
228	-2	6	0	-2	0	-654.8	-13.01722
229	5	-1	2	-4	0	-653.5	5.83260
230	5	3	-2	-4	0	-598.4	5.77113
231	-1	-1	2	1	1	530.3	-29.01351
232	-1	-1	2	3	-1	-530.3	-34.49329
233	0	1	2	-1	0	-508.5	-367.29021
234	1	1	2	-1	-1	-496.6	29.51740
235	1	1	2	-3	1	496.6	35.20783
236	6	0	0	-3	-1	-477.1	4.73053
237	6	0	0	-5	1	476.8	4.85632
238	-1	1	-2	4	0	469.7	-39.92682
239	-1	0	2	1	0	464.9	-29.27625
240	5	1	-2	-1	-1	-463.7	5.52880

Tabla 2.5: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_1^2 \times 10^{-9}$ (rad)	PERÍODO (días)
241	5	1	-2	-3	1	463.7	5.70140
242	-4	0	2	4	0	-439.5	-7.36665
243	-2	1	0	2	1	429.2	-14.83310
244	9	-5	0	-2	0	423.4	3.10186
245	-4	0	0	6	0	-421.7	-7.69367
246	2	2	-2	1	-1	416.8	13.01184
247	2	2	-2	-1	1	-416.8	14.01001
248	9	-5	-2	0	0	415.0	3.04732
249	-1	-2	0	5	0	394.5	-42.49810
250	6	-1	-2	0	-1	390.7	4.55392
251	2	-2	2	1	-1	390.4	13.32856
252	2	-2	2	-1	1	-390.4	14.37787
253	-2	2	2	1	-1	383.6	-14.25726
254	-2	2	2	-1	1	-383.6	-13.22484
255	9	-3	-2	-2	0	378.0	3.09310
256	5	2	0	-5	0	-373.0	5.88461
257	5	-3	2	-2	0	-365.9	5.67192
258	3	-3	-2	4	0	-346.4	8.32496
259	4	1	-2	-1	0	339.9	6.93144
260	0	0	4	-2	0	-337.9	-164.90238
261	6	0	-2	-1	-1	-320.6	4.60484
262	6	0	-2	-3	1	320.2	4.72395
263	4	-4	2	0	0	-319.9	6.90263
264	9	-7	0	0	0	319.5	3.05583
265	-2	1	2	1	0	316.8	-14.19466
266	4	0	-4	2	0	-313.8	6.55873
267	1	3	2	-4	0	277.0	38.04648
268	1	-3	0	3	1	272.8	22.78600
269	1	-3	0	5	-1	-272.8	20.25843
270	6	1	0	-5	0	-265.2	4.84904
271	2	3	0	-3	0	255.9	15.17063
272	6	-6	0	2	0	247.9	4.47977
273	-5	3	0	4	0	247.2	-5.84366
274	0	3	0	-1	0	244.9	-552.62461
275	-5	5	0	2	0	242.9	-5.68239
276	2	4	-2	-2	0	241.6	14.43868
277	3	-1	-2	1	1	240.9	8.88683
278	3	-1	-2	3	-1	-240.8	8.47446
279	4	-3	0	0	1	-240.6	6.87398
280	-2	4	2	-2	0	-236.1	-12.86432
281	9	-3	0	-4	0	223.7	3.14931
282	-2	-1	0	5	0	220.3	-16.71623
283	-2	0	2	1	1	218.6	-14.13261
284	-2	0	2	3	-1	-218.2	-15.31797
285	2	1	-2	1	0	206.8	13.06442
286	0	-1	2	1	0	-197.8	468.54482
287	9	-1	-2	-4	0	195.7	3.14028
288	2	-3	0	3	0	189.5	12.42428
289	7	-4	0	-1	0	-188.4	3.96460
290	3	0	2	-3	0	181.6	9.87212
291	0	4	0	-1	-1	181.3	-666.56749
292	0	4	0	-3	1	-181.3	-143.35314
293	3	3	0	-3	-1	180.9	9.75440
294	3	3	0	-5	1	-180.9	10.30479
295	5	-5	2	0	0	-180.6	5.51986
296	-2	3	0	0	1	179.8	-13.83629
297	3	2	0	-2	-1	177.6	9.52869
298	3	-1	2	-1	-1	171.0	9.39306
299	3	-1	2	-3	1	-171.0	9.90236
300	-1	0	2	0	1	-169.1	-27.10383

Tabla 2.5: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_1^2 \times 10^{-9}$ (rad)	PERÍODO (días)
301	-5	5	2	0	0	-168.3	-5.50199
302	-1	3	-2	2	0	162.4	-33.44176
303	0	-2	2	2	0	-159.8	219.16739
304	4	2	2	-6	0	-156.3	7.67450
305	5	1	2	-6	0	-155.4	6.00264
306	0	1	2	0	-1	149.1	66068.15238
307	2	-1	2	0	-1	146.7	13.77440
308	2	-1	0	-1	2	146.5	14.25413
309	4	-1	0	1	-2	-146.5	6.71896
310	3	0	-2	0	1	-145.9	9.08285
311	4	-4	0	1	1	144.7	6.76111
312	4	-4	0	3	-1	-144.7	6.51975
313	6	-4	-2	2	0	-136.9	4.46152
314	-2	0	0	5	-1	-127.2	-16.80311
315	-2	0	0	3	1	126.9	-15.38737
316	-1	2	0	0	1	-125.7	-27.79163
317	5	-1	-4	2	0	-115.9	5.29773
318	-3	5	0	1	-1	113.5	-9.47703
319	-3	5	0	-1	1	-113.5	-9.00951
320	4	-2	-2	1	1	113.2	6.71963
321	4	-2	-2	3	-1	-113.2	6.48116
322	3	5	0	-6	0	-108.2	10.53484
323	-3	3	0	1	1	-108.2	-9.42179
324	-3	3	0	3	-1	108.2	-9.93430
325	4	-3	0	2	-1	103.5	6.62463
326	5	-4	0	1	0	-103.2	5.41989
327	4	1	-2	0	-1	-102.3	6.80235
328	7	-4	0	0	-1	94.1	3.92203
329	4	1	0	-4	1	-93.9	7.36581
330	6	1	-2	-3	0	-93.8	4.71706
331	0	-1	0	4	-1	91.6	93.96684
332	4	2	-2	-1	-1	89.4	6.91661
333	4	2	-2	-3	1	-89.4	7.18887
334	7	-2	0	-3	0	-88.6	4.04244
335	2	-3	0	2	1	-87.8	12.86177
336	2	1	2	-3	0	-86.7	15.38373
337	2	1	-2	0	1	79.2	13.54904
338	-3	2	0	3	0	-78.8	-9.90387
339	9	-1	0	-6	0	73.5	3.19823
340	0	6	0	-4	0	-73.2	-109.95159
341	1	-2	0	4	-1	72.0	21.30665
342	-3	2	2	1	0	67.2	-9.36850
343	3	1	-4	2	0	65.9	8.60756
344	1	1	-2	1	1	65.7	25.03581
345	1	1	-2	3	-1	-65.7	22.01754
346	-1	-3	2	4	0	-65.2	-37.21344
347	0	1	0	2	-1	-64.9	172.85660
348	7	-3	-2	1	-1	-64.4	3.87130
349	7	-3	-2	-1	1	64.4	3.95514
350	3	-2	2	-1	0	64.1	9.42043
351	3	2	-2	-1	0	63.8	9.26110
352	-5	1	2	4	0	-63.2	-5.81265
353	7	-1	-2	-1	-1	-62.7	3.94548
354	-3	2	0	2	1	62.7	-9.64242
355	7	-1	-2	-3	1	62.6	4.03260
356	7	-2	0	-2	-1	62.6	3.99820
357	-1	-2	0	4	1	-61.9	-38.06878
358	2	-1	-2	3	0	60.9	12.28491
359	4	-1	-2	0	1	-60.1	6.83110
360	7	-2	-2	-1	0	-59.5	3.95030

Tabla 2.5: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_1^2 \times 10^{-9}$ (rad)	PERÍODO (días)
361	6	-4	2	-2	0	-59.2	4.70370
362	5	2	0	-4	-1	57.7	5.79131
363	-5	1	0	6	0	57.7	-6.01436
364	6	1	0	-4	-1	56.5	4.78551
365	3	0	-2	2	-1	-54.7	8.65253
366	0	-2	-2	6	0	54.2	62.10125
367	0	4	2	-4	0	-54.0	-99.91998
368	10	-4	-2	-2	0	52.4	2.78093
369	3	0	2	-2	-1	-52.0	9.61232
370	-1	-1	-2	6	0	52.0	-49.53214
371	0	3	0	0	-1	51.8	1077.31697
372	-1	5	-2	0	0	50.2	-28.76900
373	7	0	-2	-3	0	-50.1	4.02758
374	0	1	0	-1	2	-50.0	-411.82878
375	2	1	0	1	-2	50.0	13.11487
376	3	-3	2	1	-1	49.8	8.98323
377	3	-3	2	-1	1	-49.8	9.44796
378	-3	1	0	3	1	-48.6	-9.87362
379	-3	1	0	5	-1	48.6	-10.43793
380	-2	-1	2	3	0	48.1	-15.24573
381	4	-1	-2	1	0	-45.3	6.70569
382	-3	4	0	1	0	45.2	-9.44933
383	-1	1	4	-2	0	-45.0	-23.60949
384	7	-2	-2	0	-1	44.3	3.90804
385	4	4	-2	-4	0	-43.9	7.30008
386	-2	1	2	0	1	43.6	-13.66367
387	3	2	0	-4	1	-42.8	10.05321
388	6	0	2	-6	0	-42.4	4.92890
389	0	0	-2	4	0	41.6	88.92189
390	7	0	0	-5	0	-41.6	4.12340
391	0	2	2	-1	-1	-40.7	-414.36706
392	0	2	2	-3	1	40.7	-126.76077
393	-3	0	2	3	0	39.6	-9.81511
394	7	-5	0	1	-1	-38.6	3.88503
395	7	-5	0	-1	1	38.6	3.96947
396	4	-4	-2	4	0	-38.4	6.39335
397	-1	4	0	-1	0	-34.5	-26.24590
398	7	-3	0	-1	-1	-34.2	3.95975
399	7	-3	0	-3	1	34.2	4.04751
400	7	-7	0	2	0	32.8	3.85331
401	7	-1	0	-3	-1	-32.4	4.03740
402	7	-1	0	-5	1	32.4	4.12867
403	-2	-1	0	4	1	-32.2	-15.98468
404	5	-2	0	-2	1	-32.1	5.65256
405	-3	3	2	-1	1	-31.9	-8.93600
406	-3	3	2	1	-1	31.8	-9.39573
407	1	5	-2	-2	0	31.5	30.33360
408	2	3	0	-2	-1	-31.2	14.56566
409	-3	0	0	5	0	31.1	-10.40434
410	10	-6	-2	0	0	30.7	2.74387
411	1	-1	-2	3	1	-28.5	22.32158
412	1	-1	-2	5	-1	28.5	19.89050
413	0	-1	2	0	1	-26.3	-1656.97053
414	0	-3	0	5	0	26.2	78.36263
415	2	4	0	-3	-1	26.1	15.09977
416	2	4	0	-5	1	-26.1	16.46074
417	3	1	2	-3	-1	26.0	9.84206
418	3	1	2	-5	1	-26.0	10.40267
419	4	0	0	0	-2	25.8	6.83041
420	0	0	0	0	2	-25.3	

Tabla 2.5: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_i^2 \times 10^{-9}$ (rad)	PERÍODO (días)
421	-3	4	0	0	1	25.0	-9.21104
422	0	-2	2	1	1	23.9	547.96200
423	0	-2	2	3	-1	-23.9	136.97690
424	3	-2	2	0	-1	-23.4	9.18357
425	-2	-1	2	2	1	-23.0	-14.63488
426	6	-6	2	0	0	-22.2	4.59864
427	8	2	-2	-6	0	21.8	3.60627
428	-4	-2	2	6	0	-20.8	-7.64000
429	3	3	2	-6	0	20.7	10.63716
430	2	-1	-2	2	1	-20.6	12.71248
431	6	1	-2	-2	-1	20.6	4.65692
432	-3	5	2	-2	0	-19.7	-8.76993
433	2	-1	2	-1	0	-19.6	14.31421
434	-3	7	0	-2	0	-19.1	-8.84072
435	-6	6	0	2	0	19.1	-4.71089
436	5	0	0	-4	1	-19.0	5.81213
437	0	-4	2	4	0	18.9	106.16125
438	7	0	0	-4	-1	18.9	4.07737
439	2	1	2	-2	-1	18.7	14.76200
440	-1	5	0	-1	-1	17.6	-26.46072
441	-1	5	0	-3	1	-17.6	-23.11207
442	3	2	-2	0	-1	-17.3	9.03210
443	-6	6	2	0	0	-17.3	-4.58623
444	1	-2	2	1	0	17.1	26.02410
445	-6	4	0	4	0	17.0	-4.82120
446	10	-8	0	0	0	17.0	2.75076
447	4	3	0	-5	0	16.8	7.48261
448	-3	-3	2	6	0	-16.8	-10.57100
449	7	0	-2	-2	-1	16.4	3.98365
450	10	-2	-2	-4	0	16.3	2.81901
451	0	1	-2	3	0	-15.9	113.41251
452	10	-6	0	-2	0	15.8	2.78801
453	4	-1	2	-3	0	15.4	7.26813
454	-2	0	-2	6	0	15.3	-17.70521
455	0	2	-2	1	1	15.2	273.88735
456	0	2	-2	3	-1	-15.2	109.56871
457	-1	2	2	-1	0	14.4	-25.63163
458	1	2	0	1	-2	14.2	25.02649
459	-1	2	0	-1	2	-14.2	-25.82655
460	-1	4	0	0	-1	14.2	-28.27781
461	1	-5	0	6	0	-14.1	19.42453
462	2	-3	0	4	-1	14.1	12.01557
463	1	3	-2	1	-1	-14.0	24.65396
464	1	3	-2	-1	1	14.0	28.50150
465	1	1	4	-4	0	-13.7	39.41579
466	3	-5	2	2	0	13.4	8.81541
467	4	0	2	-3	-1	13.2	7.25182
468	4	0	2	-5	1	-13.2	7.55168
469	5	2	-2	-3	0	13.0	5.69136
470	9	1	-2	-6	0	12.9	3.18892
471	5	-2	-2	0	1	-12.5	5.47403
472	2	-2	4	-2	0	12.4	15.03328
473	-6	2	0	6	0	12.4	-4.93680
474	10	-4	0	-4	0	12.3	2.82628
475	6	-2	-4	2	0	-11.9	4.44342
476	7	3	-2	-6	0	11.7	4.14933
477	2	3	0	-4	1	11.6	15.82803
478	4	-1	2	-2	-1	-11.3	7.12632
479	1	-3	2	1	1	-10.9	26.23529
480	1	-3	2	3	-1	10.9	22.93991

Tabla 2.5: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_1^2 \times 10^{-9}$ (rad)	PERÍODO (días)
481	5	1	-4	0	0	-10.9	5.43764
482	0	1	2	-2	1	-10.4	-183.13605
483	-1	0	2	2	-1	10.0	-31.82727
484	1	2	2	-3	0	-9.9	34.82853
485	3	-2	-2	3	0	9.7	8.49673
486	5	0	-2	-2	1	-9.4	5.62354
487	5	-3	-2	1	1	9.4	5.40221
488	5	-3	-2	3	-1	-9.4	5.24700
489	-5	-1	2	6	0	-9.4	-5.98152
490	6	0	-4	0	0	-9.3	4.54143
491	5	-4	0	0	1	9.1	5.50152
492	2	2	-4	2	0	8.9	12.51795
493	4	-6	0	4	0	8.9	6.43090
494	8	-4	-2	1	-1	-8.8	3.39440
495	8	-4	-2	-1	1	8.8	3.45868
496	-1	3	2	-1	-1	8.8	-25.83648
497	-1	3	2	-3	1	-8.8	-22.63441
498	-2	6	-2	0	0	8.8	-14.07434
499	0	-1	2	2	-1	8.7	205.25257
500	1	-1	4	-2	0	-8.7	33.08251
501	-3	0	2	2	1	-8.7	-9.55826
502	4	-1	-2	2	-1	-8.6	6.58480
503	-2	2	4	-2	0	8.1	-12.71496
504	0	-3	0	4	1	-7.9	99.76649
505	3	3	-2	-1	-1	7.9	9.23465
506	3	3	-2	-3	1	-7.9	9.72647
507	3	-4	0	2	1	-7.9	8.76874
508	6	-2	2	-4	0	-7.6	4.81367
509	7	-5	-2	2	0	7.6	3.83980
510	4	-3	0	1	0	7.5	6.74700
511	-2	2	-2	4	0	-7.5	-16.30325
512	8	-1	-2	-3	0	-7.4	3.51395
513	0	0	-2	3	1	-7.2	117.53580
514	0	0	-2	5	-1	7.2	71.51233
515	5	-1	0	0	-2	7.0	5.47358
516	6	-5	0	1	0	-6.8	4.52904
517	-3	2	2	0	1	6.7	-9.13422
518	2	-6	0	6	0	-6.6	11.39303
519	8	-3	-2	-1	0	-6.5	3.45499
520	-4	3	0	3	0	-6.4	-7.28532
521	5	-2	-2	1	0	-6.3	5.39320
522	-4	3	2	1	0	6.1	-6.99143
523	8	-5	0	-1	0	-5.8	3.46592
524	2	0	4	-4	0	-5.6	16.21739
525	3	-2	-2	2	1	-5.6	8.69909
526	-4	1	2	3	0	5.6	-7.23718
527	0	3	0	-2	1	5.5	-219.90950
528	1	2	-2	0	1	-5.5	26.65648
529	5	-4	0	2	-1	5.5	5.34064
530	3	0	-4	3	0	5.4	8.43132
531	5	-5	0	1	1	5.4	5.42899
532	5	-5	0	3	-1	-5.4	5.27226
533	5	-5	-2	4	0	-5.4	5.18930
534	-4	6	2	-2	0	-5.4	-6.65258
535	1	0	-2	2	1	5.2	23.60092
536	4	1	2	-5	0	5.2	7.53408
537	8	-2	-2	-1	-1	-5.2	3.45130
538	8	-2	-2	-3	1	5.2	3.51778
539	-5	3	2	2	0	5.2	-5.65305
540	0	3	-2	1	0	-5.0	252.49595

Tabla 2.5: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_i^2 \times 10^{-9} \text{ (rad)}$	PERÍODO (días)
541	3	5	-2	-4	0	5.0	9.93116
542	4	1	-2	-2	1	-5.0	7.06552
543	1	-3	-2	6	0	-4.9	19.08602
544	2	-4	2	2	0	-4.9	12.96243
545	8	-5	0	0	-1	4.8	3.43334
546	-4	6	0	1	-1	4.8	-7.05169
547	-4	6	0	-1	1	-4.8	-6.78954
548	-4	3	0	2	1	4.7	-7.14285
549	-6	4	2	2	0	-4.5	-4.69071
550	11	-5	-2	-2	0	4.5	2.52600
551	-4	2	2	1	1	-4.4	-6.97634
552	-4	2	2	3	-1	4.4	-7.25342
553	-4	4	0	1	1	-4.3	-7.02106
554	-4	4	0	3	-1	4.3	-7.30178
555	1	-1	0	0	2	-4.2	27.55435
556	2	2	2	-3	-1	-4.2	15.31087
557	2	2	2	-5	1	4.2	16.71193
558	4	-2	2	-1	-1	4.2	7.00509
559	4	-2	2	-3	1	-4.2	7.28450
560	4	-3	2	-1	0	4.2	7.02031
561	-1	1	0	0	2	4.2	-27.55475
562	-2	-2	2	3	1	4.1	-15.17418
563	-2	-2	2	5	-1	-4.1	-16.54920
564	-1	0	0	4	-1	4.0	-38.98697
565	8	-1	-2	-2	-1	3.8	3.48047
566	7	1	-2	-3	-1	-3.7	4.02257
567	7	1	-2	-5	1	3.7	4.11316
568	4	-4	2	1	-1	3.6	6.77460
569	4	-4	2	-1	1	-3.6	7.03558
570	-5	7	0	0	0	3.6	-5.52977
571	1	2	-2	1	0	3.4	24.84342
572	6	4	-2	-6	0	-3.4	4.88493
573	0	4	-2	1	-1	-3.3	234.20394
574	0	4	-2	-1	1	3.3	-829.34277
575	3	-2	0	-1	2	3.3	9.39437
576	5	-2	0	1	-2	-3.3	5.40178
577	10	0	-2	-6	0	3.3	2.85814
578	11	-7	-2	0	0	3.3	2.49538
579	6	2	-2	-3	-1	-3.2	4.71019
580	6	2	-2	-5	1	3.2	4.83488
581	-4	2	0	3	1	-3.2	-7.26894
582	-4	2	0	5	-1	3.2	-7.57025
583	-3	-1	2	3	1	3.1	-9.78540
584	-3	-1	2	5	-1	-3.1	-10.33939
585	-4	5	0	0	1	3.1	-6.90336
586	4	-3	2	0	-1	-3.0	6.88792
587	1	2	2	-2	-1	2.9	31.79663
588	2	4	2	-6	0	2.9	17.32550
589	3	2	-2	-2	1	2.9	9.50203
590	4	2	-4	0	0	2.9	6.77453
591	-1	2	2	0	-1	-2.9	-27.56605
592	-1	7	0	-4	0	-2.9	-22.03295
593	8	-3	0	-2	-1	2.8	3.49157
594	-4	4	2	1	-1	2.7	-7.00658
595	-4	4	2	-1	1	-2.7	-6.74770
596	0	-1	-2	5	0	-2.6	73.12999
597	2	-4	-2	6	0	-2.6	11.27573
598	-1	-1	4	0	0	-2.5	-26.66743
599	0	6	-2	-2	0	2.4	-300.76041
600	3	-1	-4	4	0	-2.4	8.26215

Tabla 2.5: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_k^2 \times 10^{-9}$ (rad)	PERÍODO (días)
601	-6	2	2	4	0	2.4	-4.80007
602	2	6	0	-6	0	-2.3	17.05569
603	5	2	-2	-2	-1	-2.3	5.60404
604	6	-1	-2	-2	1	-2.3	4.67037
605	-1	4	0	-2	1	2.3	-24.48641
606	0	1	-2	2	1	-2.2	164.48474
607	7	-1	2	-6	0	-2.2	4.18101
608	7	-1	-4	0	0	-2.2	3.89884
609	5	-2	-2	2	-1	2.1	5.31473
610	8	-1	0	-4	-1	2.1	3.55180
611	-1	2	-2	3	0	-2.0	-36.39768
612	2	-2	-2	3	1	-1.9	12.33177
613	2	-2	-2	5	-1	1.9	11.55176
614	3	4	0	-5	0	1.9	10.27205
615	5	0	2	-5	0	1.9	5.91640
616	8	-3	0	-3	0	-1.9	3.52526
617	-1	-2	2	3	0	-1.9	-34.12915
618	-4	1	0	4	1	1.9	-7.39956
619	1	0	2	1	-2	-1.8	25.61176
620	1	-2	2	2	-1	1.8	24.29325
621	1	-5	2	4	0	1.8	21.87644
622	6	-3	-2	1	0	1.8	4.51039
623	-1	0	2	-1	2	1.8	-25.23154
624	-1	0	-2	5	0	-1.8	-44.21381
625	1	-2	2	0	1	-1.7	28.02052
626	2	-1	2	-2	1	1.7	14.89805
627	3	0	-2	-1	2	1.7	9.31447
628	5	0	-2	1	-2	-1.7	5.37526
629	-4	1	0	5	0	-1.7	-7.55256
630	11	-3	-2	-4	0	1.7	2.55737
631	1	0	-2	3	0	-1.6	22.16852
632	4	3	0	-4	-1	1.6	7.33240
633	-6	0	2	6	0	-1.6	-4.91465
634	7	-3	2	-4	0	-1.5	4.09780
635	7	-3	-4	2	0	-1.5	3.82638
636	-1	5	2	-4	0	-1.5	-21.59843
637	0	2	4	-4	0	-1.4	-91.56583
638	1	4	0	-3	0	1.4	33.75506
639	2	-4	0	3	1	1.4	12.47221
640	2	-4	0	5	-1	-1.4	11.67491
641	3	1	0	0	-2	1.4	9.08162
642	3	-3	4	-2	0	1.4	9.72661
643	6	-3	-2	0	1	-1.4	4.56678
644	7	-5	2	-2	0	-1.4	4.01783
645	-1	1	-2	3	1	1.4	-35.99245
646	-1	1	-2	5	-1	-1.4	-44.82688
647	-3	3	-2	4	0	-1.4	-10.24285
648	0	0	4	-1	-1	1.3	-300.62392
649	0	0	4	-3	1	-1.3	-113.61090
650	0	-1	-2	4	1	1.3	91.43692
651	4	3	-2	-3	0	1.3	7.17292
652	7	-7	2	0	0	-1.3	3.94093
653	8	0	-2	-3	-1	-1.3	3.51014
654	8	0	-2	-5	1	1.3	3.57892
655	-1	2	2	-2	1	1.3	-23.95091
656	4	0	-4	1	1	-1.2	6.67865
657	4	0	-4	3	-1	1.2	6.44303
658	4	1	2	-4	-1	-1.2	7.38182
659	6	2	2	-8	0	-1.2	5.04979
660	8	2	0	-8	0	1.2	3.68291

Tabla 2.5: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_i^2 \times 10^{-9}$ (rad)	PERÍODO (días)
661	8	-6	0	1	-1	1.2	3.40495
662	8	-6	0	-1	1	-1.2	3.46964
663	9	-4	-2	-1	0	-1.2	3.07004
664	4	-6	2	2	0	-1.1	6.67872
665	5	-1	2	-3	-1	1.1	5.74092
666	5	-1	2	-5	1	-1.1	5.92724
667	-1	-3	-2	8	0	1.1	-65.22306
668	-2	-2	-2	8	0	1.1	-19.37097
669	-4	-2	0	8	0	-1.1	-7.99232
670	1	0	2	-2	1	1.0	32.43465
671	2	-4	2	1	1	-1.0	13.43937
672	2	-4	2	3	-1	1.0	12.51818
673	6	-3	0	-2	1	-1.0	4.69038
374	8	-6	-2	2	0	1.0	3.37016
675	-1	-2	2	2	1	-1.0	-31.21269
676	-3	5	-2	2	0	1.0	-9.75742
677	-3	-3	0	8	0	-1.0	-11.25766
678	0	3	2	-3	0	0.9	-131.93390
679	2	1	-2	2	-1	0.9	12.61328
680	2	-3	2	0	1	0.9	13.89279
681	4	-5	0	3	0	-0.9	6.53292
682	5	3	2	-8	0	-0.9	6.18290
683	5	-7	0	4	0	-0.9	5.21401
684	6	-1	0	-4	1	-0.9	4.79972
685	-3	7	-2	0	0	0.9	-9.31594
686	-7	7	2	0	0	-0.9	-3.93181
687	2	3	-2	-1	0	-0.8	13.94956
688	5	3	-2	-3	-1	0.8	5.68136
689	5	3	-2	-5	1	-0.8	5.86377
690	8	-8	0	2	0	0.8	3.38056
691	9	-5	-2	1	-1	-0.8	3.02211
692	9	-5	-2	-1	1	0.8	3.07296
693	-2	1	2	2	-1	0.8	-14.76859
694	-7	3	2	4	0	0.8	-4.08794
695	2	4	-2	-1	-1	-0.7	13.88963
696	2	4	-2	-3	1	0.7	15.03293
697	4	-2	-4	4	0	-0.7	6.35625
698	4	-3	-2	3	0	0.7	6.49418
699	5	0	2	-4	-1	-0.7	5.82209
700	6	-4	-2	1	1	0.7	4.51669
701	6	-4	-2	3	-1	-0.7	4.40768
702	7	2	-2	-5	0	-0.7	4.10794
703	7	3	0	-8	0	0.7	4.25111
704	8	-4	0	-1	-1	0.7	3.46221
705	8	-4	0	-3	1	-0.7	3.52911
706	9	1	0	-8	0	0.7	3.24869
707	-2	6	0	-1	-1	0.7	-13.49828
708	-2	6	0	-3	1	-0.7	-12.56928
709	-3	-2	2	5	0	0.7	-10.30643
710	0	-3	2	3	0	-0.6	143.03742
711	1	5	0	-3	-1	0.6	33.40626
712	1	5	0	-5	1	-0.6	40.88482
713	2	0	-4	4	0	0.6	11.80049
714	2	-3	2	1	0	0.6	13.38373
715	3	2	2	-5	0	-0.6	10.36931
716	8	1	-2	-5	0	-0.6	3.57497
717	9	-4	-2	0	-1	0.6	3.04445
718	-1	3	-2	1	1	0.6	-30.63678
719	-1	3	-2	3	-1	-0.6	-36.81214
720	-2	3	2	0	-1	0.6	-13.78015

Tabla 2.5: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_1^2 \times 10^{-9}$ (rad)	PERÍODO (días)
721	-2	3	2	-1	0	-0.6	-13.27917
722	-3	1	-2	6	0	0.6	-10.77909
723	-5	5	2	1	-1	0.6	-5.58614
724	-5	5	2	-1	1	-0.6	-5.42034
725	10	-2	0	-6	0	0.6	2.86562
726	0	3	0	1	-2	0.5	272.77609
727	0	-3	2	2	1	0.5	235.10608
728	1	0	-2	4	-1	-0.5	20.90004
729	1	1	-4	4	0	0.5	20.63959
730	1	3	2	-3	-1	-0.5	34.45731
731	1	3	2	-5	1	0.5	42.47031
732	1	3	-4	2	0	-0.5	22.93912
733	2	6	-2	-4	0	0.5	15.52759
734	3	0	2	-4	1	0.5	10.14635
735	3	-2	2	-2	1	0.5	9.66982
736	3	-3	-2	3	1	0.5	8.51912
737	3	-3	-2	5	-1	-0.5	8.13944
738	4	-1	-2	-1	2	0.5	6.96129
739	4	-3	-2	2	1	-0.5	6.61174
740	6	-1	-2	1	-2	-0.5	4.49784
741	6	-6	-2	4	0	-0.5	4.36689
742	7	1	2	-8	0	-0.5	4.26767
743	8	-2	0	-3	-1	0.5	3.52142
744	8	-2	0	-5	1	-0.5	3.59066
745	9	-2	-2	-3	0	-0.5	3.11651
746	-1	4	-2	1	0	-0.5	-30.92989
747	-2	3	0	-1	2	-0.5	-13.33129
748	-2	4	-2	2	0	-0.5	-15.10702
749	-3	1	4	0	0	0.5	-9.08412
750	-4	0	2	3	1	0.5	-7.22101
751	-4	0	2	5	-1	-0.5	-7.51828
752	-4	2	-2	6	0	-0.5	-7.74810
753	-4	-1	2	5	0	0.5	-7.50083
754	-5	4	2	1	0	0.5	-5.57650
755	-5	7	2	-2	0	-0.5	-5.35879
756	-5	-1	0	8	0	-0.5	-6.19534
757	1	2	-2	2	-1	0.4	23.26129
758	1	4	0	-4	1	0.4	37.19213
759	1	-2	-2	5	0	0.4	20.01364
760	1	-4	0	5	0	-0.4	20.38618
761	2	-1	-2	4	-1	-0.4	11.88517
762	2	-6	2	4	0	0.4	12.19469
763	3	-1	4	-4	0	0.4	10.20889
764	3	-4	0	4	-1	0.4	8.36701
765	4	-5	0	2	1	-0.4	6.65190
766	5	-1	-4	1	1	-0.4	5.37569
767	5	-1	-4	3	-1	0.4	5.22199
768	5	-5	2	1	-1	0.4	5.43768
769	5	-5	2	-1	1	-0.4	5.60456
770	9	-2	-2	-2	-1	0.4	3.09015
771	9	-3	-2	-1	-1	-0.4	3.06713
772	9	-3	-2	-3	1	0.4	3.11952
773	-1	-5	2	6	0	0.4	-45.42336
774	-2	0	4	0	0	-0.4	-13.55187
775	-2	1	0	4	-1	-0.4	-16.14433
776	-2	3	0	2	-1	0.4	-14.97047
777	-2	4	2	-1	-1	0.4	-13.33394
778	-2	4	2	-3	1	-0.4	-12.42666
779	-2	5	0	-2	1	0.4	-12.96502
780	-3	0	0	4	1	0.4	-10.11618

Tabla 2.5: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_i^2 \times 10^{-9}$ (rad)	PERÍODO (días)
781	-3	4	2	-1	0	-0.4	-8.96077
782	-3	-1	-2	8	0	0.4	-11.37458
783	11	-1	-2	-6	0	0.4	2.58954
784	1	4	-2	-1	0	-0.3	28.25242
785	2	1	-2	-1	2	-0.3	14.07099
786	3	3	-4	0	0	0.3	8.98311
787	3	-4	2	1	0	-0.3	9.00826
788	4	1	-2	1	-2	0.3	6.67799
789	4	3	-2	-2	-1	-0.3	7.03477
790	5	-2	2	-3	0	-0.3	5.75114
791	6	-2	0	0	-2	0.3	4.56647
792	6	-3	-2	2	-1	0.3	4.45537
793	6	-5	0	2	-1	0.3	4.47357
794	7	-4	-2	1	0	-0.3	3.87594
795	8	-1	0	-5	0	-0.3	3.58667
796	8	-4	-4	2	0	-0.3	3.35982
797	-1	0	-2	4	1	0.3	-39.43973
798	-1	2	-2	2	1	0.3	-33.09937
799	-1	3	4	-4	0	0.3	-21.18072
800	-1	7	-2	-2	0	0.3	-25.24197
801	-2	2	0	0	2	0.3	-13.77732
802	-4	4	-2	4	0	-0.3	-7.46710
803	-5	3	2	1	1	-0.3	-5.56690
804	-5	3	2	3	-1	0.3	-5.74192
805	12	-6	-2	-2	0	0.3	2.31388
806	12	-8	-2	0	0	0.3	2.28816
807	0	3	-2	0	1	-0.2	817.87479
808	0	-2	4	0	0	0.2	-828.30579
809	0	-2	-2	5	1	-0.2	74.82254
810	0	-2	-2	7	-1	0.2	53.07711
811	0	-4	-2	8	0	0.2	47.71073
812	1	0	4	-3	0	0.2	35.97252
813	1	2	2	-4	1	0.2	38.49957
814	1	5	2	-6	0	-0.2	46.67068
815	1	-2	-2	4	1	0.2	21.17381
816	1	-4	0	4	1	-0.2	21.59125
817	2	1	2	-4	1	0.2	16.06014
818	2	2	4	-6	0	-0.2	17.60400
819	2	3	-2	0	-1	0.2	13.43641
820	2	3	-2	-2	1	-0.2	14.50346
821	2	-2	0	0	2	-0.2	13.77723
822	2	-3	2	2	-1	-0.2	12.91067
823	2	-5	0	5	0	0.2	11.71722
824	3	1	-4	1	1	0.2	8.81530
825	3	1	-4	3	-1	-0.2	8.40939
826	3	-4	2	0	1	0.2	9.23605
827	3	-7	0	6	0	-0.2	8.06032
828	4	2	2	-5	-1	0.2	7.51657
829	4	2	2	-7	1	-0.2	7.83921
830	4	-2	4	-4	0	0.2	7.44904
831	5	0	-4	1	0	0.2	5.36677
832	5	1	2	-5	-1	0.2	5.90559
833	5	1	2	-7	1	-0.2	6.10294
834	5	5	-2	-6	0	-0.2	5.93755
835	5	-2	2	-2	-1	-0.2	5.66199
836	5	-4	2	0	-1	-0.2	5.51045
837	6	1	-2	-4	1	-0.2	4.77877
838	6	2	0	-5	-1	-0.2	4.84177
839	6	2	0	-7	1	0.2	4.97363
840	6	-5	0	0	1	0.2	4.58590

Tabla 2.5: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_1^2 \times 10^{-9}$ (rad)	PERÍODO (días)
841	6	-6	0	1	1	-0.2	4.53540
842	6	-6	0	3	-1	0.2	4.42549
843	6	-8	0	4	0	-0.2	4.38438
844	7	1	0	-5	-1	-0.2	4.11815
845	7	1	0	-7	1	0.2	4.21315
846	7	1	-4	-2	0	-0.2	3.97409
847	7	-2	-2	-2	1	-0.2	3.99349
848	8	-2	2	-6	0	0.2	3.63018
849	8	-2	-4	0	0	-0.2	3.41555
850	8	-4	2	-4	0	-0.2	3.56729
851	9	-1	-2	-3	-1	-0.2	3.11351
852	9	-1	-2	-5	1	0.2	3.16751
853	-1	1	4	-1	-1	0.2	-25.24101
854	-1	1	4	-3	1	-0.2	-22.17609
855	-1	5	-2	1	-1	-0.2	-31.22866
856	-1	5	-2	-1	1	0.2	-26.66850
857	-2	3	2	-2	1	0.2	-12.81333
858	-2	-1	2	4	-1	0.2	-15.90980
859	-2	-2	0	5	1	0.2	-16.63024
860	-2	-2	0	7	-1	-0.2	-18.29629
861	-3	3	4	-2	0	0.2	-8.70026
862	-3	-1	0	5	1	0.2	-10.37096
863	-3	-1	0	7	-1	-0.2	-10.99535
864	-4	1	2	2	1	0.2	-7.09657
865	-4	6	-2	2	0	-0.2	-7.20577
866	-5	2	2	2	1	0.2	-5.64319
867	-7	5	2	2	0	0.2	-4.00836
868	10	0	0	-8	0	0.2	2.90607
869	12	-4	-2	-4	0	0.2	2.34018
870	0	1	2	1	-2	-0.1	363.25139
871	0	4	-4	2	0	-0.1	136.94858
872	0	-1	2	-1	2	0.1	-299.28564
873	0	-4	2	3	1	-0.1	149.65906
874	0	-4	2	5	-1	0.1	82.25435
875	1	0	0	3	-2	-0.1	22.31417
876	1	0	2	-3	2	-0.1	35.59549
877	1	0	-2	1	2	-0.1	25.23121
878	1	-3	4	0	0	0.1	28.50273
879	2	-1	2	1	-2	-0.1	13.27383
880	2	-3	-2	5	0	0.1	11.59318
881	3	0	0	-3	2	0.1	9.84350
882	3	0	2	-1	-2	0.1	9.36584
883	3	0	-2	3	-2	0.1	8.45230
884	3	1	4	-6	0	-0.1	10.74149
885	3	-5	0	3	1	-0.1	8.58591
886	3	-5	0	5	-1	0.1	8.20039
887	4	-3	0	-1	2	-0.1	7.00582
888	4	-4	4	-2	0	0.1	7.18895
889	5	0	0	-1	-2	-0.1	5.54732
890	5	-4	-2	3	0	0.1	5.25553
891	5	-7	2	2	0	-0.1	5.37574
892	6	2	-4	-2	0	-0.1	4.64386
893	6	3	-2	-5	0	0.1	4.82766
894	6	4	0	-8	0	-0.1	5.02661
895	6	-3	0	1	-2	0.1	4.51639
896	7	2	-2	-4	-1	0.1	4.06225
897	7	-5	-2	1	1	0.1	3.88059
898	7	-5	-2	3	-1	-0.1	3.79985
899	8	1	-2	-4	-1	0.1	3.54032
900	8	-8	2	0	0	-0.1	3.44781

Tabla 2.5: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_i^2 \times 10^{-9}$ (rad)	PERÍODO (días)
901	9	0	-2	-5	0	-0.1	3.16441
902	-1	0	0	1	2	0.1	-29.53082
903	-1	-1	-2	5	1	-0.1	-43.61729
904	-1	-1	-2	7	-1	0.1	-57.30287
905	-1	-2	2	4	-1	0.1	-37.64679
906	-2	1	2	-1	2	0.1	-13.17096
907	-2	2	-2	3	1	0.1	-15.60665
908	-2	2	-2	5	-1	-0.1	-17.06494
909	-3	1	2	3	-1	0.1	-9.84500
910	-3	4	2	0	-1	0.1	-9.18613
911	-3	-2	2	4	1	-0.1	-10.02359
912	-5	0	2	5	0	0.1	-5.89587
913	-5	4	2	0	1	0.1	-5.49264
914	10	-5	-2	-1	0	-0.1	2.76228
915	11	-5	0	-4	0	0.1	2.56336
916	11	-7	0	-2	0	0.1	2.53184

Tabla 2.6: Desarrollo de $\left(\frac{a_S}{r_S}\right)^3 P_{20}(\sin \beta_S)$.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_i^0 \times 10^{-9}$ (rad)	PERÍODO (días)
1	0	0	0	0	0	-500209456.4	
2	0	0	0	1	-1	-25070799.8	365.25964
3	0	0	0	2	-2	-628286.7	182.62982
4	0	0	0	3	-3	-15455.0	121.75321
5	0	0	0	4	-4	-375.1	91.31491
6	0	0	0	5	-5	-5.8	73.05193

Tabla 2.7: Desarrollo de $\left(\frac{a_S}{r_S}\right)^3 P_{22}(\sin \beta_S) \cos 2\lambda_S$.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$A_i^2 \times 10^{-9}$ (rad)	PERÍODO (días)
1	0	0	0	2	0	2997902146.0	182.62109
2	0	0	0	3	-1	175248846.8	121.74933
3	0	0	0	1	1	-25146093.1	365.22475
4	0	0	0	4	-2	3763016.1	91.31273
5	0	0	0	0	2	-3351539.1	
6	0	0	0	5	-3	162266.5	73.05053
7	0	0	0	-1	3	-83695.4	-365.29453
8	0	0	0	6	-4	5681.4	60.87564
9	0	0	0	-2	4	-2095.5	-182.63854
10	0	0	0	7	-5	130.7	52.17924
11	0	0	0	-3	5	-61.2	-121.75709
12	0	0	0	8	-6	2.7	45.65691
13	0	0	0	-4	6	-1.3	-91.31709

Capítulo 3

Contribuciones al desarrollo del potencial lunisolar de primer orden

3.1 Introducción.

La mejora de la precisión de las observaciones de VLBI en la última década conduce a estimaciones de los coeficientes de la nutación de la Tierra con precisiones de unos pocos microsegundos de arco. Esto obliga a considerar, al menos, valores de los coeficientes de la nutación para un modelo de Tierra rígido al nivel del microsegundo de arco y a introducir correcciones y otras contribuciones (planetarias, potencial lunisolar de segundo orden, etc.) a los coeficientes de las series de nutación adoptadas por la IAU en 1980 [Seidelmann 1982].

Las nuevas contribuciones han sido estudiadas por muchos autores [Zhu & Groten 1989], [Kinoshita & Souchay 1990], [Souchay 1993], [Williams 1994, 1995], [Souchay *et al.*, 1995, 1996], [Souchay & Kinoshita 1996, 1997], [Hartmann & Soffel 1994], [Bretagnon *et al.* 1997], [Souchay 1997], [Roosbeek & Dehant 1997], [Souchay *et al.* 1997] y [Folgueira *et al.* 1997a,b].

En este Capítulo consideraremos las aportaciones al potencial lunisolar de primer orden de los armónicos zonales J_3 y J_4 , de los armónicos no zonales de grado 3: C_{3m} y S_{3m} $\{m=1,2,3\}$, de los armónicos C_{41} y S_{41} y del efecto planetario directo e indirecto.

3.2 Los términos de segundo orden del potencial.

3.2.1 Contribución de J_3 .

Consideremos ahora los efectos en la nutación del término más significativo del potencial de segundo orden debido a la Luna, esto es, la parte que contiene solamente el armónico zonal J_3 . Este término viene dado por (2.5.17):

$$U_2^{J_3} = \frac{\kappa^2 M M_M a^3}{r_M^4} J_3 P_{30}(\sin \delta_M) \quad (3.2.1)$$

El polinomio de Legendre que aparece en la expresión anterior puede expresarse en función de $P_{3m''}(\text{sen } \beta_M)$, combinaciones lineales de λ_M y las variables de Andoyer y los polinomios modificados de Jacobi $\bar{Q}_3^{(m', m'')}(\varepsilon, \cos I)$. A partir de (2.6.23), tenemos:

$$P_{30}(\text{sen } \delta_M) = \sum_{\rho, \varepsilon = \pm 1} \sum_{m', m''=0}^3 \bar{Q}_3^{(0, m')}(\rho, \cos J) \bar{Q}_3^{(m', m'')}(\varepsilon, \cos I) P_{3m''}(\text{sen } \beta_M) \times \\ \cos \left[\rho \varepsilon m''(\lambda_M - h) - m' \rho g - \frac{\pi}{2} m' + \frac{\pi}{2} \rho(m' - m'') \right] \quad (3.2.2)$$

Sustituyendo en (3.2.2) las expresiones de los polinomios modificados de Jacobi, podemos aproximar $P_{30}(\text{sen } \delta_M)$ a:

$$P_{30}(\text{sen } \delta_M) \approx P_{30}^{(0,0)} + P_{30}^{(0,1)} \quad (3.2.3)$$

En (3.2.3) denotamos por $P_{30}^{(0, m')}$ a la parte de $P_{30}(\text{sen } \delta_M)$ que está relacionada con el polinomio modificado de Jacobi $\bar{Q}_3^{(0, m')}(\rho, \cos J)$. En la expresión anterior hemos considerado sólo las funciones $P_{30}^{(0, m')}$ que verifiquen que estas o sus derivadas con respecto a J no tengan $\text{sen } J$ como factor. Como veremos en el siguiente Capítulo, la función $P_{30}^{(0,0)}$ contribuirá a los términos de Poisson, mientras que $P_{30}^{(0,1)}$ estará directamente relacionada con los términos Oppolzer. Las expresiones de estas funciones tienen la forma:

$$P_{30}^{(0,0)} = \frac{1}{2} \cos J (-3 + 5 \cos^2 J) \left\{ \frac{1}{2} \cos I (-3 + 5 \cos^2 I) P_{30}(\text{sen } \beta_M) \right. \\ + \frac{1}{4} \text{sen } I (1 - 5 \cos^2 I) P_{31}(\text{sen } \beta_M) \text{sen}(\lambda_M - h) \\ - \frac{1}{4} \text{sen}^2 I \cos I P_{32}(\text{sen } \beta_M) \cos 2(\lambda_M - h) \\ \left. + \frac{1}{24} \text{sen}^3 I P_{33}(\text{sen } \beta_M) \text{sen } 3(\lambda_M - h) \right\} \quad (3.2.4)$$

$$P_{30}^{(0,1)} = \frac{1}{4} \text{sen } J (1 - 5 \cos^2 J) \left\{ \frac{3}{2} \text{sen } I (-1 + 5 \cos^2 I) P_{30}(\text{sen } \beta_M) \cos g \right. \\ + \sum_{\varepsilon = \pm 1} \frac{1}{8} \varepsilon (1 + \varepsilon \cos I) (-1 - 10 \varepsilon \cos I + 15 \cos^2 I) P_{31}(\text{sen } \beta_M) \text{sen}(\lambda_M - h - \varepsilon g) \\ - \sum_{\varepsilon = \pm 1} \frac{1}{8} \text{sen } I (1 + \varepsilon \cos I) (1 - 3 \varepsilon \cos I) P_{32}(\text{sen } \beta_M) \cos(2(\lambda_M - h) - \varepsilon g) \\ \left. - \sum_{\varepsilon = \pm 1} \frac{1}{16} \varepsilon \text{sen}^2 I (1 + \varepsilon \cos I) P_{33}(\text{sen } \beta_M) \text{sen}(3(\lambda_M - h) - \varepsilon g) \right\} \quad (3.2.5)$$

Procediendo de la misma forma que en los desarrollos de primer orden, podemos expresar las diferentes funciones que aparecen en la expresión del polinomio de Legendre de tercer grado de la forma, utilizando (2.7.35), (2.7.74), (2.7.75), (2.7.76), (2.7.77) y (2.8.83):

$$\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_{30}(\sin \beta_M) = \sum_i G_i^0 \sin \chi_i \quad (a)$$

$$\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_{31}(\sin \beta_M) \sin \lambda_m = \sum_i G_i^1 \sin \chi_i \quad (b1)$$

$$\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_{31}(\sin \beta_M) \cos \lambda_m = \sum_i \bar{G}_i^1 \cos \chi_i \quad (b2)$$

$$\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_{32}(\sin \beta_M) \sin 2\lambda_m = \sum_i \bar{G}_i^2 \cos \chi_i \quad (c1)$$

$$\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_{32}(\sin \beta_M) \cos 2\lambda_m = \sum_i G_i^2 \sin \chi_i \quad (c2)$$

$$\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_{33}(\sin \beta_M) \sin 3\lambda_m = \sum_i G_i^3 \sin \chi_i \quad (d1)$$

$$\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_{33}(\sin \beta_M) \cos 3\lambda_m = \sum_i \bar{G}_i^3 \cos \chi_i \quad (d2)$$

(3.2.6)

con,

$$\begin{aligned} G_i^1 &= \bar{G}_i^1 \\ \bar{G}_i^2 &= -G_i^2 \\ G_i^3 &= \bar{G}_i^3 \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Los coeficientes $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$ verifican también las siguientes relaciones:

- En el desarrollo (a) de (3.2.6): $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 = 0$,
- En los desarrollos (b1) y (b2) de (3.2.6): $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 = 1$,
- En los desarrollos (c1) y (c2) de (3.2.6): $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 = 2$,
- En los desarrollos (d1) y (d2) de (3.2.6): $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 = 3$.

Las Tablas 3.1 a 3.4 muestran los términos correspondientes a cada desarrollo.

A partir de las ecuaciones (3.2.6) y (3.2.7), tenemos:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_{30}(\sin \beta_M) \cos u &= -\frac{1}{2} \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \epsilon G_i^0 \sin(u - \epsilon \chi_i) \\
\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_{30}(\sin \beta_M) \sin u &= \frac{1}{2} \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \epsilon G_i^0 \cos(u - \epsilon \chi_i) \\
\sum_{\epsilon=\pm 1} \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_{31}(\sin \beta_M) \sin(\lambda_m - \epsilon u) &= - \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \epsilon G_i^1 \sin(u - \epsilon \chi_i) \\
\sum_{\epsilon=\pm 1} \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_{31}(\sin \beta_M) \cos(\lambda_m - \epsilon u) &= \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i G_i^1 \cos(u - \epsilon \chi_i) \\
\sum_{\epsilon=\pm 1} \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_{32}(\sin \beta_M) \sin(2\lambda_m - \epsilon u) &= - \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i G_i^2 \cos(u - \epsilon \chi_i) \\
\sum_{\epsilon=\pm 1} \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_{32}(\sin \beta_M) \cos(2\lambda_m - \epsilon u) &= - \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \epsilon G_i^2 \sin(u - \epsilon \chi_i) \\
\sum_{\epsilon=\pm 1} \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_{33}(\sin \beta_M) \sin(3\lambda_m - \epsilon u) &= - \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \epsilon G_i^3 \sin(u - \epsilon \chi_i) \\
\sum_{\epsilon=\pm 1} \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_{33}(\sin \beta_M) \cos(3\lambda_m - \epsilon u) &= \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i G_i^3 \cos(u - \epsilon \chi_i) \quad (3.2.8)
\end{aligned}$$

siendo u una combinación lineal de las variables de Andoyer l y g .

A partir de (3.2.3), (3.2.4), (3.2.5) y (3.2.8), llegamos a:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_{30}(\sin \delta_M) &\approx \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 \{P_{30}^{(0,0)} + P_{30}^{(0,1)}\} = \frac{1}{2} \cos J (-3 + 5 \cos^2 J) \sum_i M_i^0 \sin \chi_i \\
&+ \frac{1}{4} \sin J (1 - 5 \cos^2 J) \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i M_i^1(\epsilon) \sin(g - \epsilon \chi_i) \quad (3.2.9)
\end{aligned}$$

siendo,

$$\begin{aligned}
M_i^0 &= \frac{1}{2} \cos I (-3 + 5 \cos^2 I) G_i^0 + \frac{1}{4} \sin I (1 - 5 \cos^2 I) G_i^1 - \frac{1}{4} \sin^2 I \cos I G_i^2 + \frac{1}{24} \sin^3 I G_i^3 \\
M_i^1(\epsilon) &= -\frac{3}{4} \epsilon \sin I (-1 + 5 \cos^2 I) G_i^0 - \frac{1}{8} (1 + \epsilon \cos I) (-1 - 10 \epsilon \cos I + 15 \cos^2 I) G_i^1 \\
&+ \frac{1}{8} \epsilon \sin I (1 + \epsilon \cos I) (1 - 3 \epsilon \cos I) G_i^2 + \frac{1}{16} \sin^2 I (1 + \epsilon \cos I) G_i^3 \quad (3.2.10)
\end{aligned}$$

A partir de (3.2.9) podemos escribir (3.2.1) de la forma:

$$U_2^{J_3} \approx \frac{\kappa^2 M M_M a^3}{a_M^4} \left(\frac{a_M}{r_M} \right)^4 J_3 [P_{30}^{(0,0)} + P_{30}^{(0,1)}] \quad (3.2.11)$$

La contribución del armónico zonal J_3 a las nutaciones solares es más pequeña que la correspondiente a las nutaciones lunares. No obstante, se han obtenido componentes mayores a la precisión considerada [Souchay & Kinoshita 1996]. Las expresiones correspondientes a la parte solar de la energía potencial son análogas a las desarrolladas anteriormente para la parte lunar, reemplazando el subíndice M por S . En este caso, los desarrollos se simplifican considerablemente pues se considera, en el teorema de Wigner de transformación de armónicos esféricos, el valor de la latitud eclíptica β_S igual a cero. Las funciones de Legendre de grado 3, $P_{3m''}(0)$, en (2.6.23) se anulan cuando m'' es par. Las tablas 3.5 y 3.6 muestran los términos correspondientes a la parte solar de la energía potencial debida al armónico zonal de grado 3.

3.2.2 Contribución de J_4 .

La influencia del coeficiente J_4 en la nutación es pequeña. Kinoshita (1977) hizo un breve estudio y apuntó que esta influencia era despreciable de acuerdo con la precisión que consideraba. Kinoshita & Souchay (1990) calcularon solamente la influencia de J_4 en la precesión. Recientemente, Souchay & Kinoshita (1997) han hallado 3 términos, siendo el mayor el de argumento $h_M = \Omega$ [Souchay & Kinoshita 1997]. Calcularemos los principales términos del potencial lunar relacionado con J_4 . A partir de (2.5.17):

$$U_2^{J_4} = \frac{\kappa^2 M M_M a^4}{r_M^5} J_4 P_{40}(\sin \delta_M) \quad (3.2.12)$$

$P_{40}(\sin \delta_M)$ se puede expresar en función de los polinomios modificados de Jacobi [Kinoshita *et al.* 1974], aproximando $\cos J$ a 1:

$$\begin{aligned} P_{40}(\sin \delta_M) &= \frac{1}{8}(3 - 30 \cos^2 I + 35 \cos^4 I) P_{40}(\sin \beta_M) \\ &+ \frac{1}{4} \sin I \cos I (3 - 7 \cos^2 I) P_{41}(\sin \beta_M) \sin(\lambda_M - h) \\ &- \frac{1}{24} \sin^2 I (-1 + 7 \cos^2 I) P_{42}(\sin \beta_M) \cos 2(\lambda_M - h) \\ &+ \frac{1}{24} \sin^3 I \cos I P_{43}(\sin \beta_M) \sin 3(\lambda_M - h) \\ &+ \frac{1}{192} \sin^4 I P_{44}(\sin \beta_M) \cos 4(\lambda_M - h) \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Las diferentes funciones que aparecen en la expresión del polinomio de Legendre de cuarto orden se pueden escribir de la forma, con la ayuda de (2.7.35), (2.7.78), (2.7.79), (2.7.80), (2.7.81), (2.7.82) y (2.8.83):

$$\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^5 P_{40}(\sin \beta_M) = \sum_i H_i^0 \cos \chi_i \quad (a)$$

$$\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^5 P_{41}(\sin \beta_M) \sin \lambda_m = \sum_i H_i^1 \cos \chi_i \quad (b1)$$

$$\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^5 P_{41}(\sin \beta_M) \cos \lambda_m = \sum_i \bar{H}_i^1 \sin \chi_i \quad (b2)$$

$$\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^5 P_{42}(\sin \beta_M) \sin 2\lambda_m = \sum_i \bar{H}_i^2 \sin \chi_i \quad (c1)$$

$$\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^5 P_{42}(\sin \beta_M) \cos 2\lambda_m = \sum_i H_i^2 \cos \chi_i \quad (c2)$$

$$\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^5 P_{43}(\sin \beta_M) \sin 3\lambda_m = \sum_i H_i^3 \cos \chi_i \quad (d1)$$

$$\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^5 P_{43}(\sin \beta_M) \cos 3\lambda_m = \sum_i \bar{H}_i^3 \sin \chi_i \quad (d2)$$

$$\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^5 P_{44}(\sin \beta_M) \sin 4\lambda_m = \sum_i \bar{H}_i^4 \sin \chi_i \quad (e1)$$

$$\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^5 P_{44}(\sin \beta_M) \cos 4\lambda_m = \sum_i H_i^4 \cos \chi_i \quad (e2)$$

(3.2.14)

con,

$$\begin{aligned} \bar{H}_i^1 &= -H_i^1 \\ \bar{H}_i^2 &= H_i^2 \\ \bar{H}_i^3 &= -H_i^3 \\ \bar{H}_i^4 &= H_i^4 \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

Los coeficientes $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$ verifican las relaciones:

- En el desarrollo (a) de (3.2.14): $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 = 0$,
- En los desarrollos (b1) y (b2) de (3.2.14): $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 = 1$,
- En los desarrollos (c1) y (c2) de (3.2.14): $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 = 2$,
- En los desarrollos (d1) y (d2) de (3.2.14): $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 = 3$,
- En los desarrollos (e1) y (e2) de (3.2.14): $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 = 4$.

Las Tablas 3.7 a 3.11 muestran los términos correspondientes a cada desarrollo.

Sustituyendo (3.2.13) y (3.2.14) en la expresión de $U_4^{J_4}$, obtenemos:

$$U_2^{J_4} = \frac{\kappa^2 M M_M a^4}{a_M^5} J_4 \sum_i N_i^0 \cos \chi_i \quad (3.2.16)$$

siendo,

$$\begin{aligned} N_i^0 &= \frac{1}{8}(3 - 30 \cos^2 I + 35 \cos^4 I) H_i^0 + \frac{1}{4} \sin I \cos I (3 - 7 \cos^2 I) H_i^1 \\ &- \frac{1}{24} \sin^2 I (-1 + 7 \cos^2 I) H_i^2 + \frac{1}{24} \sin^3 I \cos I H_i^3 + \frac{1}{192} \sin^4 I H_i^4 \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

3.2.3 Contribución de los armónicos no zonales de tercer grado.

La influencia sobre la nutación de los armónicos no zonales de tercer grado es, de hecho, del mismo orden que la influencia de J_3 . Por lo tanto, no es despreciable con respecto a la actual precisión de las medidas VLBI y LLR, es decir, unos pocos microsegundos de arco [Dehant *et al.* 1997b]. La influencia de estos armónicos, C_{3m} y S_{3m} $\{m=1,2,3\}$, ha sido estudiada en detalle [Folgueira *et al.* 1997a]. En esta sección, resumiremos dicho estudio.

La parte lunar de la energía potencial gravitatoria correspondiente a estos armónicos es (2.5.17):

$$U_2^{CS} = -\frac{\kappa^2 M M_M a^3}{r_M^4} \sum_{m=1}^3 P_{3m}(\sin \delta_M) [C_{3m} \cos m\alpha_M + S_{3m} \sin m\alpha_M] \quad (3.2.18)$$

Las funciones de Legendre que aparecen en la expresión anterior tienen la forma (2.6.23):

$$\begin{aligned} P_{3m}(\sin \delta_M) \cos(m\alpha_M + \tau_{3m}) &= \sum_{\rho, \epsilon = \pm 1} \sum_{m', m''=0}^3 \bar{Q}_3^{(m, m')}(\rho, \cos J) \bar{Q}_3^{(m', m'')}(\epsilon, \cos I) \times \\ &P_{3m''}(\sin \beta_M) \cos \left[\rho \epsilon m'' (\lambda_M - h) - m l - m' \rho g + \frac{\pi}{2} (m - m') + \frac{\pi}{2} \rho (m' - m'') + \tau_{3m} \right] \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

en donde hemos tenido en cuenta que:

$$C_{3m} \cos m\alpha_M + S_{3m} \sin m\alpha_M = \sqrt{C_{3m}^2 + S_{3m}^2} \cos(m\alpha_M + \tau_{3m}) \quad (3.2.20)$$

siendo,

$$\tan \tau_{3m} = -\frac{S_{3m}}{C_{3m}} \quad (3.2.21)$$

Sustituyendo las expresiones de los polinomios modificados de Jacobi en (3.2.19) obtenemos:

$$P_{31}(\sin \delta_M) \cos(\alpha_M + \tau_{31}) \approx P_{31}^{(1,0)} + P_{31}^{(1,1)} + P_{31}^{(1,2)} \quad (3.2.22)$$

En (3.2.22) denotamos por $P_{31}^{(1,m')}$ a la parte de $P_{31}(\sin \delta_M) \cos(\alpha_M + \tau_{31})$ que está relacionada con el polinomio modificado de Jacobi $\bar{Q}_3^{(1,m')}(\rho, \cos J)$. Teniendo en cuenta las expresiones de dichos polinomios y que el ángulo J es muy pequeño, tenemos solamente que considerar las funciones $P_{31}^{(1,m')}$ que cumplan que estas, o sus derivadas con respecto a J , no tengan $\sin J$ como factor [Folgueira *et al.* 1997a]. Estas funciones tienen la forma:

$$\begin{aligned} P_{31}^{(1,0)} = & \frac{3}{2} \sin J (-1 + 5 \cos^2 J) \left\{ \frac{1}{2} \cos I (-3 + 5 \cos^2 I) P_{30}(\sin \beta_M) \sin(l - \tau_{31}) \right. \\ & + \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1}{8} \epsilon \sin I (1 - 5 \cos^2 I) P_{31}(\sin \beta_M) \cos(\lambda_m - \epsilon l + \epsilon \tau_{31}) \\ & + \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1}{8} \epsilon \sin^2 I \cos I P_{32}(\sin \beta_M) \sin(2\lambda_m - \epsilon l + \epsilon \tau_{31}) \\ & \left. + \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1}{48} \epsilon \sin^3 I P_{33}(\sin \beta_M) \cos(3\lambda_m - \epsilon l + \epsilon \tau_{31}) \right\} \quad (3.2.23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{31}^{(1,1)} = & \sum_{\rho=\pm 1} \frac{1}{8} (1 + \rho \cos J) (-1 - 10\rho \cos J + 15 \cos^2 J) \times \\ & \left\{ \frac{3}{2} \sin I (-1 + 5 \cos^2 I) P_{30}(\sin \beta_M) \sin(\rho l + g - \rho \tau_{31}) \right. \\ & + \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1}{8} (1 + \epsilon \cos I) (-1 - 10\epsilon \cos I + 15 \cos^2 I) P_{31}(\sin \beta_M) \cos(\lambda_m - \rho \epsilon l - \epsilon g + \rho \epsilon \tau_{31}) \\ & + \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1}{8} \epsilon \sin I (1 + \epsilon \cos I) (1 - 3\epsilon \cos I) P_{32}(\sin \beta_M) \sin(2\lambda_m - \rho \epsilon l - \epsilon g + \rho \epsilon \tau_{31}) \\ & \left. - \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1}{16} \sin^2 I (1 + \epsilon \cos I) P_{33}(\sin \beta_M) \cos(3\lambda_m - \rho \epsilon l - \epsilon g + \rho \epsilon \tau_{31}) \right\} \quad (3.2.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{31}^{(1,2)} = & \sum_{\rho=\pm 1} \frac{1}{8} \rho \sin J (1 + \rho \cos J) (1 - 3\rho \cos J) \times \\
& \left\{ 15 \sin^2 I \cos I P_{30}(\sin \beta_M) \sin(\rho l + 2g - \rho \tau_{31}) \right. \\
& + \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{5}{4} \epsilon \sin I (1 + \epsilon \cos I) (-1 + 3\epsilon \cos I) P_{31}(\sin \beta_M) \cos(\lambda_m - \rho \epsilon l - 2\epsilon g + \rho \epsilon \tau_{31}) \\
& + \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1}{4} (1 + \epsilon \cos I)^2 (-2 + 3\epsilon \cos I) P_{32}(\sin \beta_M) \sin(2\lambda_m - \rho \epsilon l - 2\epsilon g + \rho \epsilon \tau_{31}) \\
& \left. + \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1}{8} \epsilon \sin I (1 + \epsilon \cos I)^2 P_{33}(\sin \beta_M) \cos(3\lambda_m - \rho \epsilon l - 2\epsilon g + \rho \epsilon \tau_{31}) \right\} \quad (3.2.25)
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las simplificaciones y notaciones previas, tenemos también:

$$P_{32}(\sin \delta_M) \cos(2\alpha_M + \tau_{32}) \approx P_{32}^{(2,1)} + P_{32}^{(2,2)} + P_{32}^{(2,3)} \quad (3.2.26)$$

con,

$$\begin{aligned}
P_{32}^{(2,1)} = & \sum_{\rho=\pm 1} \frac{5}{4} \sin J (1 + \rho \cos J) (-1 + 3\rho \cos J) \times \\
& \left\{ -\frac{3}{2} \sin I (-1 + 5 \cos^2 I) P_{30}(\sin \beta_M) \cos(2\rho l + g - \rho \tau_{32}) \right. \\
& - \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1}{8} \epsilon (1 + \epsilon \cos I) (-1 - 10\epsilon \cos I + 15 \cos^2 I) \times \\
& P_{31}(\sin \beta_M) \sin(\lambda_m - 2\rho \epsilon l - \epsilon g + \rho \epsilon \tau_{32}) \\
& + \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1}{8} \sin I (1 + \epsilon \cos I) (1 - 3\epsilon \cos I) P_{32}(\sin \beta_M) \cos(2\lambda_m - 2\rho \epsilon l - \epsilon g + \rho \epsilon \tau_{32}) \\
& \left. + \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1}{16} \epsilon \sin^2 I (1 + \epsilon \cos I) P_{33}(\sin \beta_M) \sin(3\lambda_m - 2\rho \epsilon l - \epsilon g + \rho \epsilon \tau_{32}) \right\} \quad (3.2.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{32}^{(2,2)} = & \sum_{\rho=\pm 1} \frac{1}{4} \rho (1 + \rho \cos J)^2 (-2 + 3\rho \cos J) \times \\
& \left\{ -15 \sin^2 I \cos I P_{30}(\sin \beta_M) \cos(2\rho l + 2g - \rho \tau_{32}) \right. \\
& - \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{5}{4} \sin I (1 + \epsilon \cos I) (-1 + 3\epsilon \cos I) P_{31}(\sin \beta_M) \sin(\lambda_m - 2\rho \epsilon l - 2\epsilon g + \rho \epsilon \tau_{32}) \\
& + \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1}{4} \epsilon (1 + \epsilon \cos I)^2 (-2 + 3\epsilon \cos I) P_{32}(\sin \beta_M) \cos(2\lambda_m - 2\rho \epsilon l - 2\epsilon g + \rho \epsilon \tau_{32}) \\
& \left. - \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1}{8} \sin I (1 + \epsilon \cos I)^2 P_{33}(\sin \beta_M) \sin(3\lambda_m - 2\rho \epsilon l - 2\epsilon g + \rho \epsilon \tau_{32}) \right\} \quad (3.2.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{32}^{(2,3)} = & - \sum_{\rho=\pm 1} \frac{1}{8} \sin J (1 + \rho \cos J)^2 \left\{ -15 \sin^3 I P_{30}(\sin \beta_M) \cos(2\rho l + 3g - \rho\tau_{32}) \right. \\
& - \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{15}{4} \epsilon \sin^2 I (1 + \epsilon \cos I) P_{31}(\sin \beta_M) \sin(\lambda_m - 2\rho\epsilon l - 3\epsilon g + \rho\epsilon\tau_{32}) \\
& + \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{3}{4} \sin I (1 + \epsilon \cos I)^2 P_{32}(\sin \beta_M) \cos(2\lambda_m - 2\rho\epsilon l - 3\epsilon g + \rho\epsilon\tau_{32}) \\
& \left. + \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1}{8} \epsilon (1 + \epsilon \cos I)^3 P_{33}(\sin \beta_M) \sin(3\lambda_m - 2\rho\epsilon l - 3\epsilon g + \rho\epsilon\tau_{32}) \right\} \quad (3.2.29)
\end{aligned}$$

Finalmente, con las aproximaciones anteriores, obtenemos:

$$P_{33}(\sin \delta_M) \cos(3\alpha_M + \tau_{33}) \approx P_{33}^{(3,2)} + P_{33}^{(3,3)} \quad (3.2.30)$$

con,

$$\begin{aligned}
P_{33}^{(3,2)} = & \sum_{\rho=\pm 1} \frac{3}{4} \rho \sin J (1 + \rho \cos J)^2 \left\{ -15 \sin^2 I \cos I P_{30}(\sin \beta_M) \sin(3\rho l + 2g - \rho\tau_{33}) \right. \\
& - \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{5}{4} \epsilon \sin I (1 + \epsilon \cos I) (-1 + 3\epsilon \cos I) P_{31}(\sin \beta_M) \cos(\lambda_m - 3\rho\epsilon l - 2\epsilon g + \rho\epsilon\tau_{33}) \\
& - \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1}{4} (1 + \epsilon \cos I)^2 (-2 + 3\epsilon \cos I) P_{32}(\sin \beta_M) \sin(2\lambda_m - 3\rho\epsilon l - 2\epsilon g + \rho\epsilon\tau_{33}) \\
& \left. - \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1}{8} \epsilon \sin I (1 + \epsilon \cos I)^2 P_{33}(\sin \beta_M) \cos(3\lambda_m - 3\rho\epsilon l - 2\epsilon g + \rho\epsilon\tau_{33}) \right\} \quad (3.2.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{33}^{(3,3)} = & \sum_{\rho=\pm 1} \frac{1}{8} (1 + \rho \cos J)^3 \left\{ -15 \sin^3 I P_{30}(\sin \beta_M) \sin(3\rho l + 3g - \rho\tau_{33}) \right. \\
& - \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{15}{4} \sin^2 I (1 + \epsilon \cos I) P_{31}(\sin \beta_M) \cos(\lambda_m - 3\rho\epsilon l - 3\epsilon g + \rho\epsilon\tau_{33}) \\
& - \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{3}{4} \epsilon \sin I (1 + \epsilon \cos I)^2 P_{32}(\sin \beta_M) \sin(2\lambda_m - 3\rho\epsilon l - 3\epsilon g + \rho\epsilon\tau_{33}) \\
& \left. + \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1}{8} (1 + \epsilon \cos I)^3 P_{33}(\sin \beta_M) \cos(3\lambda_m - 3\rho\epsilon l - 3\epsilon g + \rho\epsilon\tau_{33}) \right\} \quad (3.2.32)
\end{aligned}$$

Sustituyendo (3.2.8) en (3.2.22) a (3.2.32), llegamos a:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_{31}(\sin \delta_M) \cos(\alpha_M + \tau_{31}) &\approx \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 \{P_{31}^{(1,0)} + P_{31}^{(1,1)} + P_{31}^{(1,2)}\} \\
&= \frac{3}{2} \sin J (-1 + 5 \cos^2 J) \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i X_i^0(\epsilon) \cos(l - \tau_{31} - \epsilon \chi_i) \\
&+ \sum_{\rho=\pm 1} \frac{1}{8} (1 + \rho \cos J) (-1 - 10\rho \cos J + 15 \cos^2 J) \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i X_i^1(\epsilon) \cos(\rho l + g - \rho \tau_{31} - \epsilon \chi_i) \\
&+ \sum_{\rho=\pm 1} \frac{1}{8} \rho \sin J (1 + \rho \cos J) (1 - 3\rho \cos J) \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i X_i^2(\epsilon) \cos(\rho l + 2g - \rho \tau_{31} - \epsilon \chi_i)
\end{aligned} \tag{3.2.33}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_{32}(\sin \delta_M) \cos(2\alpha_M + \tau_{32}) &\approx \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 \{P_{32}^{(2,1)} + P_{32}^{(2,2)} + P_{32}^{(2,3)}\} \\
&= \sum_{\rho=\pm 1} \frac{5}{4} \sin J (1 + \rho \cos J) (-1 + 3\rho \cos J) \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i X_i^1(\epsilon) \sin(2\rho l + g - \rho \tau_{32} - \epsilon \chi_i) \\
&+ \sum_{\rho=\pm 1} \frac{1}{4} \rho (1 + \rho \cos J)^2 (-2 + 3\rho \cos J) \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i X_i^2(\epsilon) \sin(2\rho l + 2g - \rho \tau_{32} - \epsilon \chi_i) \\
&- \sum_{\rho=\pm 1} \frac{1}{8} \sin J (1 + \rho \cos J)^2 \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i X_i^3(\epsilon) \sin(2\rho l + 3g - \rho \tau_{32} - \epsilon \chi_i)
\end{aligned} \tag{3.2.34}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_{33}(\sin \delta_M) \cos(3\alpha_M + \tau_{33}) &\approx \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 \{P_{33}^{(3,2)} + P_{33}^{(3,3)}\} \\
&= - \sum_{\rho=\pm 1} \frac{3}{4} \rho \sin J (1 + \rho \cos J)^2 \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i X_i^2(\epsilon) \cos(3\rho l + 2g - \rho \tau_{33} - \epsilon \chi_i) \\
&- \sum_{\rho=\pm 1} \frac{1}{8} (1 + \rho \cos J)^3 \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i X_i^3(\epsilon) \cos(3\rho l + 3g - \rho \tau_{33} - \epsilon \chi_i)
\end{aligned} \tag{3.2.35}$$

con,

$$\begin{aligned}
X_i^0(\epsilon) &= \frac{1}{4} \epsilon \cos I (-3 + 5 \cos^2 I) G_i^0 + \frac{1}{8} \epsilon \sin I (1 - 5 \cos^2 I) G_i^1 \\
&- \frac{1}{8} \epsilon \sin^2 I \cos I G_i^2 + \frac{1}{48} \epsilon \sin^3 I G_i^3 \\
X_i^1(\epsilon) &= \frac{3}{4} \epsilon \sin I (-1 + 5 \cos^2 I) G_i^0 + \frac{1}{8} (1 + \epsilon \cos I) (-1 - 10\epsilon \cos I + 15 \cos^2 I) G_i^1 \\
&- \frac{1}{8} \epsilon \sin I (1 + \epsilon \cos I) (1 - 3\epsilon \cos I) G_i^2 - \frac{1}{16} \sin^2 I (1 + \epsilon \cos I) G_i^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_i^2(\varepsilon) &= \frac{15}{2}\varepsilon \sin^2 I \cos I G_i^0 + \frac{5}{4}\varepsilon \sin I (1 + \varepsilon \cos I)(-1 + 3\varepsilon \cos I)G_i^1 \\
&- \frac{1}{4}(1 + \varepsilon \cos I)^2(-2 + 3\varepsilon \cos I)G_i^2 + \frac{1}{8}\varepsilon \sin I (1 + \varepsilon \cos I)^2 G_i^3 \\
X_i^3(\varepsilon) &= \frac{15}{2}\varepsilon \sin^3 I G_i^0 + \frac{15}{4}\varepsilon \sin^2 I (1 + \varepsilon \cos I)G_i^1 \\
&- \frac{3}{4}\varepsilon \sin I (1 + \varepsilon \cos I)^2 G_i^2 - \frac{1}{8}(1 + \varepsilon \cos I)^3 G_i^3
\end{aligned} \tag{3.2.36}$$

Recopilando, podemos escribir (3.2.18) de la forma:

$$\begin{aligned}
U_2^{CS} &= U_2^{31} + U_2^{32} + U_2^{33} \\
&\approx -\frac{\kappa^2 M M_M a^3}{a_M^4} \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 \left\{ \sqrt{C_{31}^2 + S_{31}^2} [P_{31}^{(1,0)} + P_{31}^{(1,1)} + P_{31}^{(1,2)}] \right. \\
&+ \left. \sqrt{C_{32}^2 + S_{32}^2} [P_{32}^{(2,1)} + P_{32}^{(2,2)} + P_{32}^{(2,3)}] + \sqrt{C_{33}^2 + S_{33}^2} [P_{33}^{(3,2)} + P_{33}^{(3,3)}] \right\}
\end{aligned} \tag{3.2.37}$$

Bretagnon *et al.* (1997) y Folgueira *et al.* (1997a) han estudiado la influencia de los armónicos C_{3m} y S_{3m} ($m > 1$) sobre las correspondientes nutaciones solares. Sólomente para $m = 1$ se obtienen componentes mayores a la precisión considerada. La expresión de la parte solar de la energía potencial gravitatoria debida a estos armónicos es similar a la expresión de la parte lunar, cambiando el subíndice M por S e igualando la latitud eclíptica del Sol a 0.

3.2.4 Contribución de los armónicos no zonales C_{41} y S_{41} .

La influencia de estos armónicos en la nutación aunque pequeña no es despreciable. Recientemente, Bretagnon *et al.* (1997) y Folgueira *et al.* (1997b) han estudiado esta contribución. Bretagnon *et al.* (1997) obtuvo los efectos de estos armónicos a partir de un método clásico y de las teorías del movimiento de la Luna del Bureau des Longitudes. Folgueira *et al.* (1997b) obtuvieron resultados similares extendiendo la teoría desarrollada por Kinoshita (1977) y Kinoshita & Souchay (1990). En esta sección resumiremos dicha contribución.

La parte lunar de la energía potencial gravitatoria relacionada con estos armónicos, C_{41} y S_{41} , se puede escribir de la forma [Kinoshita 1977]:

$$U_2^{41} = -\frac{\kappa^2 M M_M a^4}{r_M^5} P_{41}(\sin \delta_M) [C_{41} \cos \alpha_M + S_{41} \sin \alpha_M] \tag{3.2.38}$$

La función asociada de Legendre en (3.2.38) se puede expresar de la forma [Kinoshita *et al.* 1974]:

$$P_{41}(\sin \delta_M) \cos(\alpha_M + \tau_{41}) = \sum_{\rho, \varepsilon = \pm 1} \sum_{m', m''=0}^4 \bar{Q}_4^{(1, m')}(\rho, \cos J) \bar{Q}_4^{(m', m'')}(\varepsilon, \cos I) P_{4m''}(\sin \beta_M) \times \\ \cos \left[\rho \varepsilon m''(\lambda_M - h) - l - m' \rho g + \frac{\pi}{2}(1 - m') + \frac{\pi}{2} \rho(m' - m'') + \tau_{41} \right] \quad (3.2.39)$$

en la cual, y siguiendo la misma notación que en la sección anterior, hemos considerado que:

$$C_{41} \cos \alpha_M + S_{41} \sin \alpha_M = \sqrt{C_{41}^2 + S_{41}^2} \cos(\alpha_M + \tau_{41}) \quad (3.2.40)$$

siendo,

$$\tan \tau_{41} = -\frac{S_{41}}{C_{41}} \quad (3.2.41)$$

La expresión (3.2.39) la podemos escribir de forma simbólica y aproximada como:

$$P_{41}(\sin \delta_M) \cos(\alpha_M + \tau_{41}) \approx P_{41}^{(1,0)} + P_{41}^{(1,1)} + P_{41}^{(1,2)} \quad (3.2.42)$$

en donde hemos tenido en cuenta las mismas aproximaciones realizadas en la sección anterior. Las expresiones de las funciones que aparecen en (3.2.42) tienen la forma:

$$P_{41}^{(1,0)} = \frac{5}{2} \sin J \cos J (-3 + 7 \cos^2 J) \left\{ \frac{1}{8} (3 - 30 \cos^2 I + 35 \cos^4 I) P_{40}(\sin \beta_M) \sin(l - \tau_{41}) \right. \\ + \sum_{\varepsilon = \pm 1} \frac{1}{8} \varepsilon \sin I \cos I (3 - 7 \cos^2 I) P_{41}(\sin \beta_M) \cos(\lambda_m - \varepsilon l + \varepsilon \tau_{41}) \\ + \sum_{\varepsilon = \pm 1} \frac{1}{48} \varepsilon \sin^2 I (-1 + 7 \cos^2 I) P_{42}(\sin \beta_M) \sin(2\lambda_m - \varepsilon l + \varepsilon \tau_{41}) \\ + \sum_{\varepsilon = \pm 1} \frac{1}{48} \varepsilon \sin^3 I \cos I P_{43}(\sin \beta_M) \cos(3\lambda_m - \varepsilon l + \varepsilon \tau_{41}) \\ \left. - \sum_{\varepsilon = \pm 1} \frac{1}{384} \varepsilon \sin^4 I P_{44}(\sin \beta_M) \sin(4\lambda_m - \varepsilon l + \varepsilon \tau_{41}) \right\} \quad (3.2.43)$$

$$\begin{aligned}
P_{41}^{(1,1)} = & \sum_{\rho=\pm 1} \frac{1}{8} \rho (1 + \rho \cos J) (3 - 6\rho \cos J - 21 \cos^2 J + 28\rho \cos^3 J) \times \\
& \left\{ \frac{5}{2} \sin I \cos I (-3 + 7 \cos^2 I) P_{40}(\sin \beta_M) \sin(\rho l + g - \rho \tau_{41}) \right. \\
& + \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1}{8} \epsilon (1 + \epsilon \cos I) (3 - 6\epsilon \cos I - 21 \cos^2 I + 28\epsilon \cos^3 I) \times \\
& P_{41}(\sin \beta_M) \cos(\lambda_m - \rho \epsilon l - \epsilon g + \rho \epsilon \tau_{41}) \\
& + \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1}{24} \sin I (1 + \epsilon \cos I) (1 + 7\epsilon \cos I - 14 \cos^2 I) \times \\
& P_{42}(\sin \beta_M) \sin(2\lambda_m - \rho \epsilon l - \epsilon g + \rho \epsilon \tau_{41}) \\
& - \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1}{48} \epsilon \sin^2 I (1 + \epsilon \cos I) (-1 + 4\epsilon \cos I) \times \\
& P_{43}(\sin \beta_M) \cos(3\lambda_m - \rho \epsilon l - \epsilon g + \rho \epsilon \tau_{41}) \\
& + \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1}{96} \sin^3 I (1 + \epsilon \cos I) \times \\
& \left. P_{44}(\sin \beta_M) \sin(4\lambda_m - \rho \epsilon l - \epsilon g + \rho \epsilon \tau_{41}) \right\} \quad (3.2.44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{41}^{(1,2)} = & \sum_{\rho=\pm 1} \frac{1}{24} \sin J (1 + \rho \cos J) (1 + 7\rho \cos J - 14 \cos^2 J) \times \\
& \left\{ \frac{15}{2} \sin^2 I (-1 + 7 \cos^2 I) P_{40}(\sin \beta_M) \sin(\rho l + 2g - \rho \tau_{41}) \right. \\
& + \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{3}{4} \sin I (1 + \epsilon \cos I) (-1 - 7\epsilon \cos I + 14 \cos^2 I) \times \\
& P_{41}(\sin \beta_M) \cos(\lambda_m - \rho \epsilon l - 2\epsilon g + \rho \epsilon \tau_{41}) \\
& + \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1}{4} \epsilon (1 + \epsilon \cos I)^2 (1 - 7\epsilon \cos I + 7 \cos^2 I) \times \\
& P_{42}(\sin \beta_M) \sin(2\lambda_m - \rho \epsilon l - 2\epsilon g + \rho \epsilon \tau_{41}) \\
& - \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1}{8} \sin I (1 + \epsilon \cos I)^2 (1 - 2\epsilon \cos I) \times \\
& P_{43}(\sin \beta_M) \cos(3\lambda_m - \rho \epsilon l - 2\epsilon g + \rho \epsilon \tau_{41}) \\
& - \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1}{32} \epsilon \sin^2 I (1 + \epsilon \cos I)^2 \times \\
& \left. P_{44}(\sin \beta_M) \sin(4\lambda_m - \rho \epsilon l - 2\epsilon g + \rho \epsilon \tau_{41}) \right\} \quad (3.2.45)
\end{aligned}$$

A partir de (3.2.14) y (3.2.15), tenemos:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^5 P_{40}(\sin \beta_M) \sin u &= \frac{1}{2} \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i H_i^0 \sin(u - \epsilon \chi_i) \\
\sum_{\epsilon=\pm 1} \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^5 P_{41}(\sin \beta_M) \cos(\lambda_m - \epsilon u) &= \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \epsilon H_i^1 \sin(u - \epsilon \chi_i) \\
\sum_{\epsilon=\pm 1} \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^5 P_{42}(\sin \beta_M) \sin(2\lambda_m - \epsilon u) &= - \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \epsilon H_i^2 \sin(u - \epsilon \chi_i) \\
\sum_{\epsilon=\pm 1} \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^5 P_{43}(\sin \beta_M) \cos(3\lambda_m - \epsilon u) &= \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \epsilon H_i^3 \sin(u - \epsilon \chi_i) \\
\sum_{\epsilon=\pm 1} \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^5 P_{44}(\sin \beta_M) \sin(4\lambda_m - \epsilon u) &= - \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \epsilon H_i^4 \sin(u - \epsilon \chi_i)
\end{aligned} \tag{3.2.46}$$

siendo u una combinación lineal de las variables de Andoyer l y g .

Sustituyendo (3.2.46) en (3.2.43), (3.2.44) y (3.2.45) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^5 P_{41}(\sin \delta_M) \cos(\alpha_M + \tau_{41}) &\approx \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^5 \{P_{41}^{(1,0)} + P_{41}^{(1,1)} + P_{41}^{(1,2)}\} \\
&= \frac{5}{2} \sin J \cos J (-3 + 7 \cos^2 J) \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i R_i^0 \sin(l - \tau_{41} - \epsilon \chi_i) \\
&+ \sum_{\rho=\pm 1} \frac{1}{8} \rho (1 + \rho \cos J) (3 - 6\rho \cos J - 21 \cos^2 J + 28\rho \cos^3 J) \times \\
&\quad \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i R_i^1(\epsilon) \sin(\rho l + g - \rho \tau_{41} - \epsilon \chi_i) \\
&+ \sum_{\rho=\pm 1} \frac{1}{24} \sin J (1 + \rho \cos J) (1 + 7\rho \cos J - 14 \cos^2 J) \times \\
&\quad \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i R_i^2(\epsilon) \sin(\rho l + 2g - \rho \tau_{41} - \epsilon \chi_i)
\end{aligned} \tag{3.2.47}$$

con,

$$\begin{aligned}
R_i^0 &= \frac{1}{16} (3 - 30 \cos^2 I + 35 \cos^4 I) H_i^0 + \frac{1}{8} \sin I \cos I (3 - 7 \cos^2 I) H_i^1 \\
&- \frac{1}{48} \sin^2 I (-1 + 7 \cos^2 I) H_i^2 + \frac{1}{48} \sin^3 I \cos I H_i^3 + \frac{1}{384} \sin^4 I H_i^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_i^1(\varepsilon) &= \frac{5}{4} \sin I \cos I (-3 + 7 \cos^2 I) H_i^0 \\
&+ \frac{1}{8} (1 + \varepsilon \cos I) (3 - 6\varepsilon \cos I - 21 \cos^2 I + 28\varepsilon \cos^3 I) H_i^1 \\
&- \frac{1}{24} \varepsilon \sin I (1 + \varepsilon \cos I) (1 + 7\varepsilon \cos I - 14 \cos^2 I) H_i^2 \\
&- \frac{1}{48} \sin^2 I (1 + \varepsilon \cos I) (-1 + 4\varepsilon \cos I) H_i^3 - \frac{1}{96} \varepsilon \sin^3 I (1 + \varepsilon \cos I) H_i^4 \\
R_i^2(\varepsilon) &= \frac{15}{4} \sin^2 I (-1 + 7 \cos^2 I) H_i^0 + \frac{3}{4} \varepsilon \sin I (1 + \varepsilon \cos I) (-1 - 7\varepsilon \cos I + 14 \cos^2 I) H_i^1 \\
&- \frac{1}{4} (1 + \varepsilon \cos I)^2 (1 - 7\varepsilon \cos I + 7 \cos^2 I) H_i^2 - \frac{1}{8} \varepsilon \sin I (1 + \varepsilon \cos I)^2 (1 - 2\varepsilon \cos I) H_i^3 \\
&+ \frac{1}{32} \sin^2 I (1 + \varepsilon \cos I)^2 H_i^4
\end{aligned} \tag{3.2.48}$$

Finalmente, escribimos (3.2.38) de la siguiente forma simbólica:

$$U_2^{41} \approx -\frac{\kappa^2 M M_M a^4}{a_M^5} \left(\frac{a_M}{r_M} \right)^5 \sqrt{C_{41}^2 + S_{41}^2} \left[P_{41}^{(1,0)} + P_{41}^{(1,1)} + P_{41}^{(1,2)} \right] \tag{3.2.49}$$

3.3 La influencia de los planetas en la nutación.

La Luna y el Sol dominan las fuerzas gravitacionales sobre la Tierra achatada. Las pequeñas fuerzas originadas por los planetas también pueden alterar la dirección del eje de rotación terrestre. Con la precisión alcanzada por las observaciones modernas, los efectos planetarios son significantes.

Estos efectos fueron estudiados por Woolard (1953) y Kinoshita (1977) pero no incluyeron los términos de nutación relacionados con estos efectos en sus resultados finales, pues estos eran muy pequeños comparados con la precisión que ellos consideraban. Vondrak (1983) y Kinoshita & Souchay (1990) los clasificaron en tres categorías:

- La fuerza directa sobre la Tierra.
- Efectos indirectos debidos a sus perturbaciones sobre la eclíptica.
- Efectos indirectos debidos a sus perturbaciones en el movimiento orbital de la Luna.

Existen trabajos previos en el cálculo de los términos de la nutación planetaria: Kinoshita & Souchay (1990) consideraron términos directos e indirectos hasta 0.005 mas , Hartmann & Soffel (1994), Williams (1995) obtuvo las nutaciones planetarias directas utilizando una técnica numérica y Souchay & Kinoshita (1996,1997). Recientemente, en la circular 16 del IAU-IUGG

Working Group sobre la Nueva Teoría de Nutación de la Tierra No-Rígida (*Resolución JD3-1*) se recomienda tener en cuenta los efectos planetarios directos de Venus, Júpiter, Marte y Saturno y los efectos planetarios indirectos [Dehant & Fukushima 1997].

En lo que sigue, estudiaremos en detalle sólo los efectos indirectos planetarios debidos a sus perturbaciones sobre la eclíptica.

3.3.1 Efectos planetarios indirectos. Contribución al potencial solar de primer orden.

En el Capítulo anterior hemos determinado los coeficientes del potencial solar considerando las coordenadas esféricas solares $(r_S, \lambda_S, \beta_S)$ con respecto a la eclíptica media de la fecha (\bar{E}) que no está sujeta a oscilaciones de corto periodo. Como consecuencia el valor de la latitud β_S es igual a cero. Sin embargo, el Sol no está sobre \bar{E} sino sobre la eclíptica verdadera de la fecha (E). Ambos planos están muy próximos pero no son iguales. Entonces la coordenada β_S , aunque muy pequeña, no es igual a cero.

La nutación de la Tierra está entonces influenciada por la expresión:

$$\left(\frac{a_S}{r_S}\right)^3 P_{21}(\sin \beta_S) \sin \lambda_S \approx 3 \left(\frac{a_S}{r_S}\right)^3 \sin \beta_S \sin \lambda_S \quad (3.3.50)$$

Para calcular la influencia anterior consideramos tres planos: \bar{E}_0 (eclíptica media en J2000.0), \bar{E} (eclíptica media en t) y E (eclíptica perturbada en t). La Figura 3.1 representa estos tres planos. El movimiento de E con respecto a \bar{E} viene dado por la longitud del nodo $h_M = \Omega$ y la inclinación \bar{i} entre los planos E y \bar{E} [Souchay & Kinoshita 1996]:

$$\sin \beta_S = \sin \bar{i} \sin(\lambda_S - h_M) \quad (3.3.51)$$

Sustituyendo esta relación en la expresión anterior y utilizando (2.9.97), tenemos:

$$\left(\frac{a_S}{r_S}\right)^3 P_{21}(\sin \beta_S) \sin \lambda_S = -\frac{3}{2} \left(\frac{a_S}{r_S}\right)^3 \sin \bar{i} \{ \cos(-h_M + 2l_S + 2\Psi') - \cos h_M \} \quad (3.3.52)$$

Ψ' viene dada por la expresión (2.9.98) y $\sin \bar{i}$ se calcula a partir de los valores de p y q [Bretagnon 1982], [Bretagnon & Francou 1988]:

$$\begin{aligned} q &= \sin\left(\frac{\bar{i}}{2}\right) \cos h_M \\ p &= \sin\left(\frac{\bar{i}}{2}\right) \sin h_M \end{aligned}$$

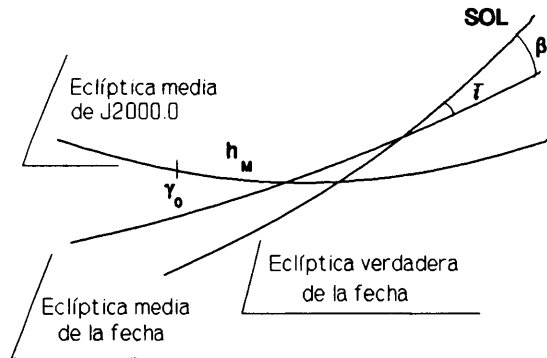


Figura 3.1: Los tres planos básicos en el estudio del efecto planetario indirecto.

Entonces,

$$\sin \bar{i} \approx 2(p^2 + q^2)^{1/2} \approx 0.002278496 T \quad (3.3.53)$$

3.4 Conclusiones y tablas.

A lo largo de este Capítulo se han estudiado las contribuciones al desarrollo del potencial lunisolar de primer orden, necesarias para la reconstrucción de una teoría de nutación de la Tierra rígida de gran precisión. Las tablas 3.1 a 3.9 muestran los términos correspondientes a los desarrollos del potencial lunisolar debido a los armónicos J_3 , J_4 , C_{3m} , S_{3m} $\{m=1,2,3\}$, C_{41} y S_{41} , obtenidos con nuestras variables y con las expresiones desarrolladas en el Capítulo precedente.

Las nuevas series han servido de test de aquellas que han sido publicadas recientemente y se observa que los resultados son bastante similares a los obtenidos por otros autores [Kinoshita & Souchay 1990], discrepando las amplitudes de los términos a partir del cuarto decimal.

El propósito de este Capítulo ha sido primero comparar nuestras series con las obtenidas por otros autores y segundo extender y mejorar la teoría de rotación de la Tierra rígida de Kinoshita & Souchay (1990).

Tabla 3.1: Desarrollo de $\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_{30}(\sin \beta_M)$.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$G_i^0 \times 10^{-5} \text{ (rad)}$	PERÍODO (días)
1	1	0	-1	0	0	-13254.5	27.21222
2	2	-1	-1	0	0	-2179.0	13.69116
3	0	1	-1	0	0	-719.9	2190.35011
4	2	1	-1	-2	0	-411.4	14.66643
5	0	1	1	-2	0	387.2	-188.20135
6	3	-2	-1	0	0	-224.4	9.14650
7	1	0	1	-2	0	-209.3	32.28078
8	3	0	-1	-2	0	-208.0	9.57171
9	1	-2	-1	2	0	-53.7	24.03551
10	3	0	-3	0	0	-43.7	9.07074
11	2	-1	1	-2	0	-36.9	14.86550
12	4	-1	-1	-2	0	-25.9	7.10398
13	4	-3	-1	0	0	-23.7	6.86704
14	1	-2	1	0	0	14.3	27.90560
15	4	-1	-3	0	0	-12.0	6.82425
16	1	2	-1	-2	0	-10.9	31.35653
17	2	1	1	-4	0	-8.2	16.02232
18	2	0	-1	-1	0	4.8	14.16202
19	0	0	-1	1	0	4.7	346.62008
20	3	2	-1	-4	0	-4.7	10.03838
21	2	-3	-1	2	0	-4.6	12.83751
22	3	0	1	-4	0	-4.4	10.13124
23	1	2	1	-4	0	4.1	38.28297
24	3	-2	1	-2	0	-4.1	9.65610
25	4	1	-1	-4	0	-4.1	7.35785
26	1	0	-3	2	0	3.7	23.51934
27	2	1	-3	0	0	2.7	13.52211
28	5	-4	-1	0	0	-2.4	5.49708
29	5	-2	-1	-2	0	-2.3	5.64787
30	0	0	1	0	-1	1.4	-6792.34506
31	2	0	-1	0	-1	-1.4	13.63342
32	4	1	-3	-2	0	-1.3	7.05819
33	1	2	-3	0	0	1.2	26.55246
34	5	0	-1	-4	0	-1.1	5.80717
35	5	-2	-3	0	0	-0.9	5.46963
36	1	-1	-1	1	0	0.8	25.52541
37	5	0	-3	-2	0	-0.8	5.61889
38	3	-1	-1	-1	0	0.7	9.35427
39	2	-1	-3	2	0	-0.6	12.68877
40	0	3	1	-4	0	0.5	-98.32485
41	0	3	-1	-2	0	0.5	-227.25402
42	3	-4	-1	2	0	-0.5	8.75746
43	4	-1	1	-4	0	-0.5	7.40761
44	4	-3	1	-2	0	-0.4	7.15036
45	3	-2	-3	2	0	-0.3	8.68798
46	1	1	-1	-1	0	0.2	29.13775
47	1	-1	-1	0	1	-0.2	27.44322
48	2	-3	1	0	0	-0.2	13.86448
49	3	-1	-1	0	-1	-0.2	9.12069
50	6	-3	-1	-2	0	-0.2	4.68714
51	6	-3	-3	0	0	-0.2	4.56372
52	6	-5	-1	0	0	-0.2	4.58282
53	0	1	3	-4	0	-0.1	-90.22450
54	0	3	-3	0	0	0.1	730.11670
55	1	-1	1	-1	0	-0.1	29.93417
56	2	0	1	-3	0	0.1	15.42225
57	3	1	-1	-3	0	0.1	9.79949
58	3	2	1	-6	0	-0.1	10.65557
59	3	2	-3	-2	0	0.1	9.48878
60	3	-4	1	0	0	-0.1	9.22353
61	4	1	1	-6	0	-0.1	7.68407
62	6	-1	-3	-2	0	-0.1	4.66717

Tabla 3.2: Desarrollo de $\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_{31}(\sin \beta_M)$ en λ_m .

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$G_i^1 \times 10^{-5} \text{ (rad)}$	PERÍODO (días)
1	1	0	0	0	0	-146057.7	27.32158
2	2	-1	0	0	0	-24012.0	13.71879
3	0	1	0	0	0	-8057.4	3231.49565
4	2	1	0	-2	0	-5687.8	14.69814
5	0	-1	0	2	0	-3506.9	193.55971
6	3	0	0	-2	0	-3099.8	9.58520
7	3	-2	0	0	0	-2473.5	9.15882
8	-1	0	2	0	0	-1644.3	-27.10373
9	3	0	-2	0	0	-1603.4	9.08286
10	-1	0	0	2	0	-1239.8	-32.12822
11	4	-1	-2	0	0	-442.4	6.83111
12	1	-2	0	2	0	-440.6	24.12079
13	4	-1	0	-2	0	-410.8	7.11141
14	1	0	0	1	-1	273.8	25.42014
15	1	0	0	-1	1	-273.8	29.53047
16	-2	1	2	0	0	-267.6	-13.66364
17	4	-3	0	0	0	-261.4	6.87398
18	1	2	0	-2	0	-183.9	31.50183
19	-1	2	0	0	0	-167.9	-27.79152
20	1	0	-2	2	0	99.5	23.60099
21	2	1	-2	0	0	97.1	13.54906
22	3	2	0	-4	0	-87.1	10.05322
23	0	-1	2	0	0	-86.6	-1656.61157
24	1	0	2	-2	0	82.3	32.43479
25	4	1	0	-4	0	-82.2	7.36582
26	2	0	0	-1	0	79.3	14.19158
27	4	1	-2	-2	0	-59.7	7.06553
28	0	1	2	-2	0	-54.8	-183.13167
29	5	-2	-2	0	0	-52.8	5.47403
30	2	-1	0	1	-1	45.0	13.22217
31	2	-1	0	-1	1	-45.0	14.25416
32	5	0	-2	-2	0	-40.0	5.62354
33	5	-2	0	-2	0	-38.2	5.65257
34	-2	-1	2	2	0	-38.0	-14.63485
35	2	-3	0	2	0	-34.9	12.86179
36	0	0	0	1	0	26.9	365.24219
37	5	-4	0	0	0	-25.9	5.50153
38	5	0	0	-4	0	-24.6	5.81213
39	1	2	-2	0	0	24.1	26.65657
40	2	0	0	0	-1	-23.6	13.66082
41	-2	1	0	2	0	-19.6	-14.83307
42	1	-2	2	0	0	18.1	28.02062
43	-1	-2	0	4	0	-17.5	-38.06859
44	-3	0	2	2	0	-17.1	-9.55825
45	2	-1	-2	2	0	-16.1	12.71250
46	0	1	0	1	-1	15.2	328.16659
47	0	1	0	-1	1	-15.2	-411.80661
48	2	-1	2	-2	0	11.9	14.89808
49	3	-1	0	-1	0	11.6	9.36716
50	-2	-1	0	4	0	-9.3	-15.98465
51	0	-1	0	1	1	-8.9	411.76226
52	0	-1	0	3	-1	8.9	126.51593
53	2	1	0	-1	-1	8.5	14.12956
54	2	1	0	-3	1	-8.5	15.31439
55	-1	2	2	-2	0	-8.5	-23.95083
56	-3	2	2	0	0	-8.1	-9.13421
57	6	-1	-2	-2	0	-7.9	4.67038
58	0	0	0	0	1	-7.7	0.00000
59	6	-3	-2	0	0	-6.6	4.56678
60	3	-2	-2	2	0	-6.3	8.69910
61	3	2	-2	-2	0	5.4	9.50204

Tabla 3.2: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$G_i^1 \times 10^{-5}$ (rad)	PERÍODO (días)
62	1	-1	0	1	0	4.6	25.62161
63	3	-2	0	1	-1	4.5	8.93478
64	3	-2	0	-1	1	-4.5	9.39438
65	3	0	0	-1	-1	4.4	9.34010
66	3	0	0	-3	1	-4.4	9.84352
67	0	3	0	-2	0	4.0	-219.90317
68	1	1	0	-1	0	3.7	29.26317
69	3	-4	0	2	0	-3.7	8.76875
70	6	-3	0	-2	0	-3.7	4.69038
71	2	1	2	-4	0	3.5	16.06017
72	-1	0	0	1	1	-3.5	-29.53070
73	-1	0	0	3	-1	3.5	-35.22677
74	-1	0	2	1	-1	3.1	-29.27614
75	-1	0	2	-1	1	-3.1	-25.23146
76	3	0	-2	1	-1	3.0	8.86248
77	3	0	-2	-1	1	-3.0	9.31448
78	3	-1	0	0	-1	-3.0	9.13294
79	2	-3	2	0	0	2.7	13.89282
80	0	-1	-2	4	0	2.6	91.43801
81	3	1	0	-3	0	2.5	9.81364
82	-3	2	0	2	0	2.5	-9.64240
83	6	-1	0	-4	0	-2.2	4.79972
84	6	-5	0	0	0	-2.1	4.58591
85	3	0	2	-4	0	1.9	10.14636
86	-2	3	0	0	0	1.8	-13.83626
87	0	1	-2	2	0	1.7	164.48828
88	-3	0	4	0	0	-1.5	-9.05865
89	5	0	-4	0	0	-1.4	5.44680
90	-4	1	2	2	0	-1.4	-7.09656
91	1	1	0	0	-1	-1.3	27.09262
92	1	-1	0	0	1	-1.3	27.55445
93	-4	3	2	0	0	-1.3	-6.86011
94	1	-2	0	1	1	-1.2	25.82629
95	1	-2	0	3	-1	1.2	22.62659
96	-1	2	0	1	-1	1.2	-30.08024
97	-1	2	0	-1	1	-1.2	-25.82647
98	0	3	-2	0	0	1.1	817.96228
99	6	1	-2	-4	0	-1.0	4.77878
100	-3	4	0	0	0	1.0	-9.21103
101	0	0	2	-1	0	0.9	-329.80476
102	0	-3	0	4	0	-0.9	99.76779
103	3	-2	2	-2	0	0.9	9.66983
104	4	0	-2	-1	0	0.9	6.94634
105	5	2	-2	-4	0	-0.9	5.78145
106	7	-4	-2	0	0	-0.9	3.91751
107	2	3	0	-4	0	-0.8	15.82806
108	4	0	0	-3	0	0.8	7.23638
109	4	-1	-2	1	-1	0.8	6.70570
110	4	-1	-2	-1	1	-0.8	6.96130
111	7	-2	-2	-2	0	-0.8	3.99350
112	1	2	2	-4	0	-0.7	38.49976
113	4	-2	0	-1	0	0.7	6.99068
114	-1	0	-2	4	0	0.7	-39.43952
115	-4	1	0	4	0	0.7	-7.39955
116	4	-1	0	-1	-1	0.6	6.97560
117	4	-1	0	-3	1	-0.6	7.25261
118	5	2	0	-6	0	-0.6	5.98097
119	-1	4	0	-2	0	0.6	-24.48634
120	-2	0	0	3	0	-0.6	-15.38734
121	-3	0	0	4	0	-0.6	-10.11617
122	0	-3	2	2	0	0.5	235.11331
123	4	-3	-2	2	0	-0.5	6.61174

Tabla 3.2: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$G_i^1 \times 10^{-5}$ (rad)	PERÍODO (días)
124	6	-1	-4	0	0	-0.5	4.54782
125	-1	-2	2	2	0	-0.5	-31.21257
126	-2	1	2	1	-1	0.5	-14.19463
127	-2	1	2	-1	1	-0.5	-13.17094
128	-2	2	0	1	0	-0.5	-14.31734
129	-2	-3	0	6	0	0.5	-17.33009
130	-3	-2	0	6	0	0.5	-10.63889
131	0	2	0	-1	0	-0.4	-471.92052
132	1	4	0	-4	0	0.4	37.19230
133	3	1	0	-2	-1	-0.4	9.55687
134	4	3	0	-6	0	-0.4	7.63911
135	4	-3	0	1	-1	0.4	6.74701
136	4	-3	0	-1	1	-0.4	7.00583
137	-1	1	0	0	1	0.4	-27.55465
138	-1	2	-2	2	0	-0.4	-33.09923
139	-1	-1	0	2	1	0.4	-31.81207
140	-4	1	4	0	0	-0.4	-6.81741
141	0	0	2	0	-1	-0.3	-3397.68151
142	1	-2	-2	4	0	0.3	21.17387
143	3	-4	2	0	0	0.3	9.23606
144	4	0	-2	0	-1	-0.3	6.81670
145	4	1	-4	0	0	0.3	6.78876
146	6	1	0	-6	0	-0.3	4.91428
147	7	0	-2	-4	0	-0.3	4.07249
148	7	-4	0	-2	0	-0.3	4.00811
149	-2	0	2	1	0	0.3	-14.13258
150	-2	5	0	-2	0	0.3	-12.96500
151	0	0	0	2	-1	-0.2	182.62546
152	0	-1	2	1	-1	0.2	468.57353
153	0	-1	2	-1	1	-0.2	-299.27393
154	1	0	2	-1	-1	-0.2	29.78950
155	1	0	2	-3	1	0.2	35.59565
156	1	0	-2	3	-1	-0.2	22.16858
157	1	2	0	-1	-1	0.2	29.00066
158	1	2	0	-3	1	-0.2	34.47514
159	1	-4	0	4	0	0.2	21.59131
160	2	0	-2	1	0	0.2	13.11745
161	2	1	-2	1	-1	-0.2	13.06445
162	2	1	-2	-1	1	0.2	14.07102
163	3	0	-4	2	0	0.2	8.63055
164	4	0	0	-2	-1	-0.2	7.09580
165	4	-1	2	-4	0	0.2	7.41570
166	4	-2	0	0	-1	-0.2	6.85940
167	5	-1	-2	-1	0	0.2	5.54778
168	7	-2	0	-4	0	-0.2	4.08769
169	-1	0	4	-2	0	0.2	-23.43825
170	-2	0	0	2	1	0.2	-14.76532
171	-2	2	0	0	1	0.2	-13.77730
172	-3	-2	2	4	0	-0.2	-10.02358
173	-4	3	0	2	0	0.2	-7.14285
174	-4	-1	0	6	0	0.2	-7.67540
175	-5	4	2	0	0	-0.2	-5.49264
176	0	3	2	-4	0	-0.1	-96.92306
177	0	-2	0	3	0	-0.1	131.66870
178	1	1	0	-2	1	0.1	31.81181
179	1	-1	0	2	-1	-0.1	23.94215
180	2	0	0	-2	1	0.1	14.76527
181	4	3	-2	-4	0	0.1	7.31661
182	4	-5	0	2	0	-0.1	6.65190
183	7	-6	0	0	0	-0.1	3.93158
184	8	-3	-2	-2	0	-0.1	3.48798
185	-1	1	2	-1	0	0.1	-25.42993

Tabla 3.2: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$G_i^1 \times 10^{-5}$ (rad)	PERÍODO (días)
186	-1	-2	0	3	1	-0.1	-34.47545
187	-2	1	0	1	1	-0.1	-14.25421
188	-2	1	0	3	-1	0.1	-15.46093
189	-2	3	0	1	-1	0.1	-14.38103
190	-2	3	0	-1	1	-0.1	-13.33127
191	-4	-1	2	4	0	-0.1	-7.34989
192	-5	4	0	2	0	0.1	-5.67241

Tabla 3.3: Desarrollo de $\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_{32}(\sin \beta_M) \cos 2\lambda_m$.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$G_i^2 \times 10^{-5}$ (rad)	PERÍODO (días)
1	1	0	1	0	0	-66545.2	27.43183
2	3	0	-1	0	0	64903.5	9.09501
3	4	-1	-1	0	0	17906.4	6.83798
4	2	-1	1	0	0	-10805.1	13.74653
5	2	1	-1	0	0	-3848.6	13.57612
6	0	1	1	0	0	-3602.6	6159.13567
7	2	1	1	-2	0	-3118.6	14.72998
8	4	1	-1	-2	0	2901.7	7.07288
9	5	-2	-1	0	0	2135.5	5.47844
10	5	0	-1	-2	0	2009.0	5.62820
11	1	0	-1	2	0	-1722.8	23.68321
12	0	-1	1	2	0	-1040.0	199.23213
13	1	2	-1	0	0	-976.2	26.76151
14	-1	2	1	0	0	723.8	-27.67838
15	2	-1	-1	2	0	637.4	12.73631
16	6	-1	-1	-2	0	404.1	4.67359
17	3	-2	1	0	0	-322.7	9.17117
18	6	-3	-1	0	0	267.5	4.56985
19	1	0	1	1	-1	249.5	25.51555
20	1	0	1	-1	1	-249.5	29.65931
21	3	2	-1	-2	0	-248.9	9.51534
22	-1	0	1	2	0	-244.1	-31.97710
23	3	0	-1	1	-1	-243.4	8.87405
24	3	0	-1	-1	1	243.4	9.32726
25	4	-1	1	-2	0	212.9	7.11885
26	3	-2	-1	2	0	185.1	8.71025
27	3	0	1	-2	0	136.0	9.59874
28	-1	0	3	0	0	-134.6	-26.99610
29	5	0	-3	0	0	124.6	5.45117
30	1	2	1	-2	0	-116.0	31.64848
31	-2	3	1	0	0	110.6	-13.80816
32	1	-2	1	2	0	-108.4	24.20668
33	4	-1	-1	1	-1	-67.2	6.71232
34	4	-1	-1	-1	1	67.2	6.96843
35	3	2	1	-4	0	-57.7	10.06811
36	6	1	-1	-4	0	55.7	4.78214
37	4	-3	1	0	0	-53.5	6.88094
38	5	2	-1	-4	0	49.5	5.78637
39	6	-1	-3	0	0	49.5	4.55087
40	2	0	1	-1	0	48.1	14.22127

Tabla 3.3: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$G_i^2 \times 10^{-5} \text{ (rad)}$	PERÍODO (días)
41	4	0	-1	-1	0	-46.9	6.95345
42	0	1	-1	2	0	-45.2	168.56679
43	7	-2	-1	-2	0	45.2	3.99584
44	2	3	-1	-2	0	-44.1	14.53449
45	0	3	-1	0	0	-43.2	929.83772
46	2	-1	1	1	-1	40.4	13.24794
47	2	-1	1	-1	1	-40.4	14.28411
48	0	-1	-1	4	0	-39.5	92.68462
49	0	3	1	-2	0	37.6	-213.01297
50	5	0	1	-4	0	37.3	5.81711
51	7	-4	-1	0	0	35.1	3.91977
52	5	-2	1	-2	0	32.8	5.65727
53	4	1	1	-4	0	32.7	7.37381
54	4	1	-3	0	0	-23.3	6.79555
55	-2	1	1	2	0	22.0	-14.80078
56	-2	1	3	0	0	-21.5	-13.63623
57	7	0	-1	-4	0	20.5	4.07493
58	-1	2	-1	2	0	18.3	-32.93886
59	1	-2	-1	4	0	-15.3	21.24002
60	2	0	1	0	-1	-14.4	13.68832
61	2	1	-1	1	-1	14.3	13.08960
62	2	1	-1	-1	1	-14.3	14.10020
63	4	0	-1	0	-1	14.0	6.82355
64	0	1	1	1	-1	13.5	344.81106
65	0	1	1	-1	1	-13.5	-388.28647
66	3	0	-3	2	0	-12.6	8.64152
67	5	-1	-1	-1	0	-12.3	5.55231
68	-3	4	1	0	0	12.1	-9.19857
69	4	-3	-1	2	0	11.4	6.61818
70	-2	-1	1	4	0	11.1	-15.94715
71	1	0	3	-2	0	10.5	32.59027
72	-1	-2	1	4	0	9.7	-37.85661
73	0	-1	1	1	1	-8.0	438.30965
74	0	-1	1	3	-1	8.0	128.91500
75	5	-2	-1	1	-1	-8.0	5.39749
76	5	-2	-1	-1	1	8.0	5.56186
77	2	1	1	-1	-1	7.7	14.15899
78	2	1	1	-3	1	-7.7	15.34897
79	6	-1	1	-4	0	7.5	4.80311
80	4	1	-1	-1	-1	-7.3	6.93852
81	4	1	-1	-3	1	7.3	7.21254
82	3	-1	1	-1	0	7.2	9.38008
83	-1	0	-1	4	0	-6.9	-39.21204
84	0	-1	3	0	0	-6.8	-1332.02689
85	2	-1	-1	1	1	6.7	13.19646
86	2	-1	-1	3	-1	-6.7	12.30717
87	5	-4	1	0	0	-6.6	5.50598
88	7	-2	-3	0	0	6.2	3.90579
89	4	3	-1	-4	0	-5.9	7.32449
90	2	-3	1	2	0	5.7	12.88617
91	-3	2	1	2	0	5.6	-9.62875
92	6	1	-3	-2	0	5.3	4.65373
93	0	1	3	-2	0	-5.2	-178.32795
94	8	-3	-1	-2	0	5.1	3.48977
95	1	0	-1	1	1	-4.8	25.32528
96	1	0	-1	3	-1	4.8	22.24111
97	1	-2	3	0	0	4.6	28.13659
98	5	0	-1	-1	-1	-4.6	5.54279
99	5	0	-1	-3	1	4.6	5.71628
100	-1	4	1	-2	0	4.6	-24.39846

Tabla 3.3: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$G_i^2 \times 10^{-5}$ (rad)	PERÍODO (días)
101	7	0	-3	-2	0	4.5	3.98132
102	6	-3	1	-2	0	4.3	4.69362
103	3	2	-3	0	0	-4.1	9.02010
104	1	2	-1	1	-1	3.7	24.93462
105	1	2	-1	-1	1	-3.7	28.87726
106	5	-1	-1	0	-1	3.7	5.46917
107	8	-5	-1	0	0	3.6	3.43161
108	-3	0	1	4	0	3.3	-10.10114
109	3	1	-1	-1	0	3.2	9.30043
110	2	-3	-1	4	0	-3.1	11.99435
111	3	0	1	-3	1	3.1	9.85779
112	3	0	1	-1	-1	-3.0	9.35295
113	-1	0	1	1	1	-3.0	-29.40298
114	-1	0	1	3	-1	3.0	-35.04518
115	8	-1	-1	-4	0	2.9	3.54994
116	-1	2	1	1	-1	-2.7	-29.94773
117	-1	2	1	-1	1	2.7	-25.72872
118	-2	3	-1	2	0	2.6	-15.00354
119	-3	2	3	0	0	2.5	-9.12195
120	3	-1	1	0	-1	-2.2	9.14523
121	4	-1	-3	2	0	-2.2	6.57843
122	1	1	1	-1	0	2.1	29.38968
123	-2	-1	3	2	0	-2.0	-14.60342
124	0	-3	1	4	0	1.8	101.25371
125	3	-2	-1	1	1	1.8	8.92303
126	3	-2	-1	3	-1	-1.8	8.50737
127	3	1	1	-3	0	1.7	9.82782
128	2	-1	3	-2	0	1.6	14.93080
129	5	1	-1	-3	0	-1.6	5.70619
130	-4	5	1	0	0	1.5	-6.89635
131	2	1	-3	2	0	1.3	12.58990
132	2	3	1	-4	0	-1.3	15.86500
133	5	-4	-1	2	0	1.3	5.33645
134	6	1	1	-6	0	1.3	4.91783
135	1	4	-1	-2	0	-1.2	30.75958
136	2	0	-1	1	0	1.2	13.14281
137	3	-2	1	1	-1	1.2	8.94654
138	3	-2	1	-1	1	-1.2	9.40738
139	5	2	-3	-2	0	-1.2	5.59942
140	6	-2	-1	-1	0	-1.2	4.62114
141	4	-1	1	-1	-1	-1.1	6.98276
142	4	-1	1	-3	1	1.1	7.26036
143	8	-1	-3	-2	0	1.1	3.47869
144	-1	4	-1	0	0	-1.1	-28.39603
145	1	-2	1	1	1	-1.0	25.92478
146	1	-2	1	3	-1	1.0	22.70215
147	3	1	-1	0	-1	-1.0	9.06950
148	5	2	1	-6	0	1.0	5.98624
149	-1	2	3	-2	0	-1.0	-23.86675
150	1	4	1	-4	0	0.9	37.39690
151	6	-1	-1	-1	-1	-0.9	4.61454
152	6	-1	-1	-3	1	0.9	4.73416
153	-2	1	-1	4	0	0.9	-16.18280
154	1	1	-1	1	0	0.8	25.12843
155	3	4	-1	-4	0	-0.8	9.97640
156	6	0	-1	-3	0	0.8	4.72724
157	6	-3	-1	1	-1	-0.8	4.51339
158	6	-3	-1	-1	1	0.8	4.62775
159	7	-2	1	-4	0	0.8	4.09015
160	8	-3	-3	0	0	0.8	3.42089

Tabla 3.3: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$G_i^2 \times 10^{-5} \text{ (rad)}$	PERÍODO (días)
161	2	2	-1	-1	0	0.7	14.03897
162	2	-3	3	0	0	0.7	13.92126
163	3	2	-1	-1	-1	0.7	9.27375
164	3	2	-1	-3	1	-0.7	9.76985
165	4	0	1	-3	0	-0.7	7.24409
166	-1	1	1	1	0	-0.7	-29.67286
167	-3	0	3	2	0	-0.7	-9.54483
168	0	2	1	-1	0	-0.6	-441.28783
169	1	1	1	0	-1	-0.6	27.20102
170	1	-1	-1	3	0	0.6	22.39518
171	2	1	3	-4	0	0.6	16.09820
172	7	-4	1	-2	0	0.6	4.01048
173	-1	-1	1	3	0	-0.6	-34.66935
174	-2	5	1	-2	0	0.6	-12.94032
175	0	-3	-1	6	0	-0.5	63.91334
176	3	-4	-1	4	0	-0.5	8.35672
177	5	0	-3	1	-1	-0.5	5.37101
178	5	0	-3	-1	1	0.5	5.53376
179	7	0	1	-6	0	0.5	4.17305
180	7	2	-1	-6	0	0.5	4.15720
181	9	-4	-1	-2	0	0.5	3.09748
182	-1	0	3	1	-1	0.5	-29.15061
183	-1	0	3	-1	1	-0.5	-25.13816
184	-2	0	1	3	0	-0.5	-15.35259
185	-2	2	1	1	0	-0.5	-14.28725
186	-3	-2	1	6	0	0.5	-10.62227
187	0	0	-1	3	0	0.4	119.60547
188	0	2	-1	1	0	0.4	285.39533
189	1	-1	-1	2	1	-0.4	23.85798
190	4	3	1	-6	0	-0.4	7.64770
191	6	-2	-1	0	-1	0.4	4.56340
192	-1	-1	1	2	1	0.4	-31.66391
193	-2	3	1	1	-1	-0.4	-14.35067
194	-2	3	1	-1	1	0.4	-13.30518
195	-2	-3	1	6	0	0.4	-17.28602
196	0	0	1	1	0	0.3	385.97885
197	0	1	-1	1	1	-0.3	313.02940
198	0	1	-1	3	-1	0.3	115.33832
199	1	2	-3	2	0	0.3	23.18190
200	1	-1	1	1	0	0.3	25.71854
201	2	0	-1	2	-1	-0.3	12.68633
202	2	-2	1	1	0	-0.3	13.30245
203	3	1	1	-2	-1	-0.3	9.57032
204	3	-4	1	2	0	-0.3	8.78008
205	5	1	-1	-2	-1	0.3	5.61842
206	5	-1	1	-3	0	-0.3	5.73608
207	6	3	-1	-6	0	0.3	4.89585
208	8	1	-1	-6	0	0.3	3.61222
209	9	-2	-1	-4	0	0.3	3.14479
210	9	-6	-1	0	0	0.3	3.05157
211	-4	1	1	4	0	0.3	-7.39151
212	-4	3	1	2	0	0.3	-7.13535
213	0	2	1	0	-1	0.2	2120.06386
214	0	3	-1	1	-1	0.2	262.24452
215	0	3	-1	-1	1	-0.2	-601.56814
216	0	-1	-1	3	1	-0.2	124.20049
217	0	-1	-1	5	-1	0.2	73.92592
218	1	1	-1	0	1	-0.2	26.98489
219	1	2	1	-1	-1	0.2	29.12491
220	1	2	1	-3	1	-0.2	34.65085

Tabla 3.3: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$G_1^2 \times 10^{-5}$ (rad)	PERÍODO (días)
221	1	-1	1	0	1	0.2	27.66659
222	1	-4	1	4	0	0.2	21.66010
223	2	2	-1	0	-1	-0.2	13.51935
224	2	-1	-3	4	0	-0.2	11.86441
225	2	-2	-1	3	0	0.2	12.35420
226	3	-1	-1	0	1	-0.2	9.12067
227	4	0	1	-2	-1	0.2	7.10321
228	4	1	1	-3	-1	-0.2	7.22789
229	4	1	1	-5	1	0.2	7.52574
230	4	2	-1	-3	0	0.2	7.19649
231	4	3	-3	-2	0	-0.2	7.02749
232	4	-2	-1	1	0	0.2	6.72628
233	4	-3	-1	1	1	0.2	6.74031
234	4	-3	-1	3	-1	-0.2	6.50040
235	6	0	-1	-2	-1	0.2	4.66684
236	6	-1	-3	1	-1	-0.2	4.49486
237	6	-1	-3	-1	1	0.2	4.60828
238	6	-5	-1	2	0	0.2	4.47063
239	9	-4	-3	0	0	0.2	3.04309
240	-1	1	1	0	1	0.2	-27.44342
241	-2	-1	-1	6	0	0.2	-17.56324
242	-3	4	-1	2	0	0.2	-9.71415
243	-4	-1	1	6	0	0.2	-7.66674
244	-5	6	1	0	0	0.2	-5.51585
245	0	0	1	0	1	0.1	-6804.43300
246	0	0	1	2	-1	-0.1	187.66676
247	0	0	-1	2	1	-0.1	177.83964
248	0	2	-1	0	1	-0.1	1305.25636
249	0	3	1	-1	-1	-0.1	-511.04595
250	0	3	1	-3	1	0.1	-134.54734
251	0	-2	1	3	0	-0.1	134.26918
252	1	1	1	-2	1	0.1	31.96137
253	1	2	3	-4	0	-0.1	38.71903
254	1	-1	1	2	-1	-0.1	24.02677
255	1	-2	-1	3	1	0.1	22.55140
256	1	-2	-1	5	-1	-0.1	20.07278
257	2	0	1	-2	1	0.1	14.79740
258	2	0	-1	0	1	-0.1	13.63337
259	2	3	-1	-1	-1	0.1	13.97827
260	2	3	-1	-3	1	-0.1	15.13682
261	2	-2	1	0	1	0.1	13.80523
262	3	-1	-1	2	-1	0.1	8.68684
263	4	0	-1	-2	1	-0.1	7.08839
264	4	-2	-1	0	1	-0.1	6.85247
265	5	0	1	-3	-1	-0.1	5.72592
266	5	0	1	-5	1	0.1	5.91125
267	5	-2	1	-1	-1	-0.1	5.57099
268	5	-2	1	-3	1	0.1	5.74627
269	5	-2	-3	2	0	0.1	5.31057
270	7	-1	-1	-3	0	-0.1	4.03500
271	7	-3	-1	-1	0	-0.1	3.95744
272	8	1	-3	-4	0	0.1	3.53847
273	9	-2	-3	-2	0	0.1	3.08874
274	-1	-2	-1	6	0	-0.1	-48.43680
275	-2	0	1	2	1	0.1	-14.73332
276	-2	2	1	0	1	0.1	-13.74944
277	-2	3	3	-2	0	0.1	-12.78921
278	-2	5	-1	0	0	-0.1	-13.98448
279	-3	2	-1	4	0	0.1	-10.19517
280	-4	3	3	0	0	0.1	-6.85320

Tabla 3.4: Desarrollo de $\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_{33}(\sin \beta_M) \sin 3\lambda_m$.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$G_i \times 10^{-5} \text{ (rad)}$	PERÍODO (días)
1	3	0	0	0	0	1448166.6	9.10719
2	4	-1	0	0	0	396094.9	6.84486
3	2	1	0	0	0	-84551.8	13.60328
4	4	1	0	-2	0	75551.0	7.08025
5	5	0	0	-2	0	53237.5	5.63286
6	1	2	0	0	0	-39879.4	26.86727
7	5	-2	0	0	0	29588.4	5.48286
8	2	-1	0	2	0	10543.7	12.76022
9	6	-1	0	-2	0	9856.2	4.67680
10	3	0	0	1	-1	-8145.0	8.88564
11	3	0	0	-1	1	8145.0	9.34007
12	3	2	0	-2	0	-6674.6	9.52867
13	6	-3	0	0	0	5471.9	4.57293
14	1	0	2	0	0	4489.5	27.54296
15	0	3	0	0	0	-4439.1	1077.16522
16	5	0	-2	0	0	4160.6	5.45555
17	4	-1	0	1	-1	-2226.9	6.71895
18	4	-1	0	-1	1	2226.9	6.97558
19	2	3	0	-2	0	-2199.4	14.56563
20	1	0	0	2	0	-2157.1	23.76600
21	3	-2	0	2	0	1699.0	8.72142
22	6	-1	-2	0	0	1649.0	4.55391
23	6	1	0	-4	0	1615.8	4.78550
24	5	2	0	-4	0	1414.9	5.79130
25	4	0	0	-1	0	-1305.6	6.96057
26	7	-4	0	0	0	807.9	3.92203
27	7	-2	0	-2	0	804.1	3.99819
28	4	1	-2	0	0	-769.8	6.80235
29	2	-1	2	0	0	714.7	13.77438
30	0	1	0	2	0	-683.7	172.85269
31	1	-2	0	4	0	-652.6	21.30659
32	7	0	0	-4	0	580.7	4.07737
33	0	-1	0	4	0	-512.9	93.96568
34	2	1	0	1	-1	474.8	13.11485
35	2	1	0	-1	1	-474.8	14.12951
36	-1	4	0	0	0	-426.0	-28.27792
37	4	0	0	0	-1	391.7	6.83040
38	5	-1	0	-1	0	-344.1	5.55685
39	2	-1	0	1	1	273.1	13.22213
40	2	-1	0	3	-1	-273.1	12.32949
41	2	0	0	1	0	256.5	13.16827
42	3	0	-2	2	0	-250.8	8.65252
43	2	1	2	-2	0	246.1	14.76197
44	4	1	0	-1	-1	-242.3	6.94561
45	4	1	0	-3	1	242.3	7.22020
46	0	1	2	0	0	234.2	65502.22771
47	1	2	0	1	-1	224.3	25.02641
48	1	2	0	-1	1	-224.3	29.00044
49	1	4	0	-2	0	-210.3	30.89939
50	7	-2	-2	0	0	206.1	3.90804
51	6	1	-2	-2	0	205.6	4.65692
52	4	3	0	-4	0	-180.9	7.33239
53	7	0	-2	-2	0	180.4	3.98365
54	5	-2	0	1	-1	-166.2	5.40177
55	5	-2	0	-1	1	166.2	5.56642
56	4	-3	0	2	0	-157.6	6.62463
57	-1	2	2	0	0	-154.9	-27.56615
58	5	0	0	-1	-1	-154.2	5.54731
59	5	0	0	-3	1	154.1	5.72109
60	8	-3	0	-2	0	150.2	3.49156

Tabla 3.4: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$G_A^3 \times 10^{-5}$ (rad)	PERÍODO (días)
61	2	-3	0	4	0	-149.7	12.01555
62	3	2	-2	0	0	-133.7	9.03209
63	3	0	2	-2	0	-112.0	9.61231
64	5	-1	0	0	-1	103.3	5.47358
65	3	1	0	-1	0	91.3	9.31317
66	3	-2	2	0	0	-84.1	9.18356
67	2	0	0	0	1	-81.1	13.66077
68	8	-5	0	0	0	76.4	3.43334
69	8	-1	0	-4	0	74.6	3.55180
70	-1	0	0	4	0	-71.5	-38.98717
71	1	0	0	1	1	71.0	25.41998
72	1	0	0	3	-1	-70.9	22.31411
73	3	-2	0	1	1	62.9	8.93476
74	3	-2	0	3	-1	-62.9	8.51803
75	3	-1	0	1	0	59.6	8.91013
76	4	-1	-2	2	0	-49.9	6.58480
77	5	2	-2	-2	0	-47.5	5.60404
78	5	1	0	-3	0	-47.2	5.71098
79	8	-1	-2	-2	0	46.0	3.48047
80	3	4	0	-4	0	-45.1	9.99106
81	4	-1	2	-2	0	-44.0	7.12632
82	-2	5	0	0	0	-40.8	-13.95577
83	2	2	0	-1	0	40.2	14.06802
84	0	-1	2	2	0	32.7	205.24706
85	6	-3	0	1	-1	-30.6	4.51638
86	6	-3	0	-1	1	30.6	4.63091
87	1	-1	0	3	0	27.5	22.46920
88	2	1	-2	2	0	26.8	12.61326
89	3	1	0	0	-1	-26.8	9.08161
90	8	-3	-2	0	0	26.5	3.42261
91	3	-1	0	0	1	-26.3	9.13292
92	6	0	0	-3	0	-26.0	4.73053
93	6	-1	0	-1	-1	-26.0	4.61768
94	6	-1	0	-3	1	25.9	4.73746
95	1	0	2	1	-1	-25.2	25.61168
96	1	0	2	-1	1	25.2	29.78927
97	6	-2	0	-1	0	-25.2	4.62428
98	0	3	0	1	-1	24.3	272.76636
99	0	3	0	-1	1	-24.3	-552.66455
100	3	2	0	-1	-1	23.9	9.28642
101	3	2	0	-3	1	-23.9	9.78391
102	5	0	-2	1	-1	-23.5	5.37526
103	5	0	-2	-1	1	23.5	5.53827
104	-2	3	2	0	0	-22.0	-13.78017
105	0	5	0	-2	0	-20.7	-254.54700
106	-1	2	0	2	0	19.9	-32.78003
107	-2	1	0	4	0	-18.8	-16.14437
108	7	2	0	-6	0	16.7	4.15975
109	9	-4	0	-2	0	15.8	3.09889
110	0	-3	0	6	0	15.1	64.51990
111	-1	-2	0	6	0	-14.6	-48.09414
112	0	1	0	1	1	-14.5	328.13843
113	0	1	0	3	-1	14.5	117.32887
114	4	-2	0	1	0	14.5	6.73295
115	3	-4	0	4	0	-13.9	8.36700
116	0	0	0	3	0	13.7	121.74740
117	-2	3	0	2	0	12.8	-14.97050
118	1	2	2	-2	0	12.7	31.79650
119	1	-1	0	2	1	-11.9	23.94200
120	5	1	0	-2	-1	10.5	5.62306

Tabla 3.4: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$G_i^3 \times 10^{-5}$ (rad)	PERÍODO (días)
121	6	3	0	-6	0	10.1	4.89938
122	6	-1	-2	1	-1	-9.3	4.49784
123	6	-1	-2	-1	1	9.3	4.61141
124	8	1	0	-6	0	9.3	3.61414
125	4	1	2	-4	0	-8.8	7.38182
126	0	3	2	-2	0	-8.0	-206.54143
127	6	-2	0	0	-1	7.5	4.56647
128	1	2	-2	2	0	7.2	23.26121
129	5	0	2	-4	0	-7.2	5.82209
130	2	2	0	0	-1	-7.1	13.54628
131	2	-2	0	3	0	7.1	12.37669
132	6	0	0	-2	-1	7.1	4.67005
133	2	3	0	-1	-1	6.9	14.00707
134	2	3	0	-3	1	-6.9	15.17060
135	4	3	-2	-2	0	-6.7	7.03477
136	4	-2	0	0	1	-5.9	6.85939
137	9	-6	0	0	0	5.9	3.05294
138	9	-2	0	-4	0	5.7	3.14624
139	4	2	0	-3	0	5.6	7.20411
140	9	-2	-2	-2	0	5.4	3.09015
141	-3	2	0	4	0	5.4	-10.17990
142	3	2	2	-4	0	5.2	10.08305
143	9	-4	-2	0	0	5.2	3.04445
144	5	-4	0	2	0	5.1	5.34064
145	8	1	-2	-4	0	5.1	3.54031
146	4	-3	2	0	0	-4.9	6.88791
147	4	0	0	-2	1	-4.7	7.09579
148	3	-1	0	2	-1	4.6	8.69796
149	6	-5	0	2	0	4.4	4.47357
150	4	1	-2	1	-1	4.3	6.67798
151	4	1	-2	-1	1	-4.3	6.93144
152	7	-1	0	-3	0	-4.1	4.03739
153	-2	-1	0	6	0	-4.1	-17.51798
154	2	0	2	-1	0	-4.0	14.25108
155	2	-1	2	1	-1	-4.0	13.27381
156	2	-1	2	-1	1	4.0	14.31418
157	0	2	0	1	0	-3.8	297.90119
158	6	0	-2	-1	0	-3.8	4.60484
159	-3	6	0	0	0	-3.8	-9.26384
160	7	2	-2	-4	0	3.6	4.06225
161	0	0	0	2	1	-3.5	182.61673
162	2	0	0	2	-1	3.5	12.71005
163	1	-2	0	3	1	3.4	22.62646
164	1	-2	0	5	-1	-3.4	20.13222
165	0	2	0	0	1	-3.3	1615.40650
166	3	1	0	-2	1	-3.3	9.55684
167	4	-3	0	1	1	3.3	6.74700
168	4	-3	0	3	-1	-3.3	6.50662
169	1	3	0	-1	0	3.2	28.74261
170	2	5	0	-4	0	-3.1	15.67451
171	2	-1	-2	4	0	-3.1	11.88516
172	7	-4	0	1	-1	-3.0	3.88037
173	7	-4	0	-1	1	3.0	3.96460
174	-1	0	2	2	0	-3.0	-31.82740
175	-1	0	4	0	0	3.0	-26.88933
176	-1	2	0	1	1	-3.0	-30.08048
177	-1	2	0	3	-1	3.0	-36.01190
178	5	-2	2	-2	0	-2.9	5.66198
179	-2	1	2	2	0	-2.9	-14.76862
180	7	-3	0	-1	0	-2.8	3.95975

Tabla 3.4: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$G_i^3 \times 10^{-5}$ (rad)	PERÍODO (días)
181	1	-4	0	6	0	-2.7	19.30847
182	2	3	-2	0	0	2.7	13.43639
183	2	-2	0	2	1	-2.7	12.81078
184	6	1	0	-3	-1	-2.7	4.72362
185	6	1	0	-5	1	2.7	4.84903
186	5	2	0	-3	-1	-2.6	5.70091
187	5	2	0	-5	1	2.6	5.88460
188	7	0	-4	0	0	2.6	3.89414
189	3	-2	-2	4	0	-2.5	8.30356
190	4	-5	0	4	0	-2.5	6.41812
191	-3	4	2	0	0	-2.4	-9.18614
192	-1	4	0	1	-1	2.3	-30.65087
193	-1	4	0	-1	1	-2.3	-26.24599
194	9	0	0	-6	0	2.2	3.19507
195	9	0	-2	-4	0	2.2	3.13723
196	-1	1	0	3	0	-2.1	-35.61517
197	0	-1	0	3	1	1.9	126.51174
198	0	-1	0	5	-1	1.9	74.73863
199	5	4	0	-6	0	-1.8	5.95891
200	7	-2	0	-1	-1	-1.8	3.95490
201	7	-2	0	-3	1	1.8	4.04244
202	-1	-2	2	4	0	-1.8	-37.64697
203	1	-2	2	2	0	1.7	24.29318
204	-2	-1	2	4	0	-1.7	-15.90983
205	7	-1	-2	-1	0	-1.5	3.94548
206	-1	6	0	-2	0	-1.5	-24.86313
207	1	4	-2	0	0	1.4	26.22393
208	8	-1	-4	0	0	1.4	3.41195
209	-1	3	0	1	0	-1.4	-30.36299
210	0	1	2	1	-1	-1.3	363.23414
211	0	1	2	-1	1	1.3	-367.30785
212	2	-3	2	2	0	-1.3	12.91064
213	3	3	0	-3	0	1.3	9.75439
214	6	-3	-2	2	0	-1.3	4.45537
215	7	-1	0	-2	-1	1.3	3.99325
216	2	0	2	0	-1	1.2	13.71594
217	3	0	-2	1	1	-1.2	8.86246
218	3	0	-2	3	-1	1.2	8.45229
219	7	-2	-2	1	-1	-1.2	3.86667
220	7	-2	-2	-1	1	1.2	3.95030
221	10	-5	0	-2	0	1.2	2.78561
222	1	1	0	1	0	1.1	25.22166
223	5	-1	0	-2	1	-1.1	5.64269
224	5	-3	0	1	0	1.1	5.41081
225	6	0	-2	0	-1	1.1	4.54751
226	6	3	-2	-4	0	-1.1	4.76468
227	6	-1	2	-4	0	-1.1	4.80651
228	10	-3	0	-4	0	1.1	2.82381
229	3	0	2	-1	-1	1.0	9.36583
230	3	0	2	-3	1	-1.0	9.87210
231	4	0	-2	1	0	1.0	6.69181
232	4	2	0	-2	-1	-1.0	7.06477
233	4	-2	0	2	-1	1.0	6.61108
234	-1	4	2	-2	0	-1.0	-24.31121
235	-3	4	0	2	0	1.0	-9.70029
236	2	0	0	-1	2	0.9	14.19153
237	4	0	0	1	-2	-0.9	6.70502
238	7	0	0	-3	-1	-0.9	4.03236
239	7	0	0	-5	1	0.9	4.12340
240	-1	2	2	1	-1	0.9	-29.81639

Tabla 3.4: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$G_i \times 10^{-5} \text{ (rad)}$	PERÍODO (días)
241	-1	2	2	-1	1	-0.9	-25.63172
242	0	0	2	1	0	0.8	409.21189
243	0	-1	2	1	1	0.8	468.51612
244	0	-1	2	3	-1	-0.8	131.40681
245	2	1	2	-1	-1	-0.8	14.18854
246	2	1	2	-3	1	0.8	15.38370
247	3	2	-2	1	-1	0.8	8.81413
248	3	2	-2	-1	1	-0.8	9.26109
249	5	-4	0	1	1	0.8	5.41989
250	5	-4	0	3	-1	-0.8	5.26368
251	6	1	-4	0	0	-0.8	4.53506
252	7	-3	0	0	-1	0.8	3.91728
253	10	-3	-2	-2	0	0.8	2.77854
254	3	-3	0	3	0	0.7	8.54054
255	4	-3	-2	4	0	-0.7	6.38073
256	5	1	-2	-1	0	0.7	5.52879
257	6	1	-2	-1	-1	-0.7	4.59829
258	6	1	-2	-3	1	0.7	4.71706
259	0	-2	0	5	0	0.6	76.50736
260	1	4	0	-1	-1	0.6	28.48932
261	1	4	0	-3	1	-0.6	33.75491
262	2	-3	0	3	1	0.6	12.42426
263	2	-3	0	5	-1	-0.6	11.63288
264	3	-1	2	-1	0	-0.6	9.39304
265	-4	3	0	4	0	0.6	-7.43360
266	10	-5	-2	0	0	0.6	2.74154
267	1	0	4	-2	0	-0.5	32.74726
268	1	0	-2	4	0	0.5	20.89998
269	3	-2	2	1	-1	0.5	8.95833
270	3	-2	2	-1	1	-0.5	9.42042
271	5	0	-4	2	0	-0.5	5.28905
272	6	2	0	-5	0	-0.5	4.84177
273	6	-3	2	-2	0	-0.5	4.69686
274	7	0	-2	-1	-1	-0.5	3.94067
275	7	0	-2	-3	1	0.5	4.02758
276	7	1	0	-5	0	-0.5	4.11815
277	-1	1	0	2	1	0.5	-32.45099
278	-2	1	4	0	0	0.5	-13.60894
279	-2	2	0	3	0	-0.5	-15.53529
280	2	2	0	-2	1	0.4	14.63156
281	2	3	2	-4	0	0.4	15.90211
282	4	3	0	-3	-1	0.4	7.18810
283	4	3	0	-5	1	-0.4	7.48260
284	4	5	0	-6	0	-0.4	7.60316
285	4	-1	-2	1	1	0.4	6.70569
286	4	-1	-2	3	-1	-0.4	6.46819
287	5	-3	0	0	1	-0.4	5.49217
288	7	-1	-2	0	-1	0.4	3.90332
289	8	-4	0	-1	0	-0.4	3.46221
290	-3	0	0	6	0	0.4	-10.70941
291	-3	0	2	4	0	-0.4	-10.08615
292	10	-1	-2	-4	0	0.4	2.81655
293	10	-7	0	0	0	0.4	2.74842
294	0	0	2	0	1	-0.3	-3400.70349
295	0	3	-2	2	0	0.3	149.29007
296	1	1	0	2	-1	-0.3	23.59256
297	3	4	-2	-2	0	0.3	9.44648
298	4	-1	2	-1	-1	0.3	6.98994
299	4	-1	2	-3	1	-0.3	7.26812
300	5	2	2	-6	0	-0.3	5.99151

Tabla 3.4: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$G_i^3 \times 10^{-5}$ (rad)	PERÍODO (días)
301	5	-1	-2	1	0	0.3	5.38421
302	5	-2	-2	1	1	0.3	5.39320
303	5	-2	-2	3	-1	-0.3	5.23850
304	6	1	2	-6	0	-0.3	4.92140
305	8	-2	0	-3	0	-0.3	3.52142
306	8	-3	0	-1	-1	-0.3	3.45850
307	8	-3	0	-3	1	0.3	3.52526
308	8	-5	0	1	-1	-0.3	3.40137
309	8	-5	0	-1	1	0.3	3.46592
310	-1	0	2	1	1	0.3	-29.27636
311	-1	0	2	3	-1	-0.3	-34.86545
312	-1	-1	0	5	0	0.3	-43.06445
313	-4	1	0	6	0	0.3	-7.71203
314	-4	5	0	2	0	0.3	-7.17456
315	-4	5	2	0	0	-0.3	-6.88936
316	0	1	4	-2	0	0.2	-173.76981
317	0	2	2	-1	0	0.2	-414.38952
318	0	4	0	-1	0	0.2	-666.62560
319	0	-3	2	4	0	-0.2	102.78457
320	1	1	2	-1	0	-0.2	29.51728
321	1	4	2	-4	0	-0.2	37.60375
322	1	6	0	-4	0	-0.2	36.35545
323	1	-2	4	0	0	-0.2	28.25352
324	2	1	-2	1	1	0.2	13.06440
325	2	1	-2	3	-1	-0.2	12.19223
326	3	1	2	-3	0	-0.2	9.84205
327	3	3	0	-2	-1	-0.2	9.50067
328	3	-1	0	-1	2	0.2	9.36714
329	3	-1	2	0	-1	0.2	9.15755
330	3	-3	0	2	1	-0.2	8.74501
331	4	0	2	-3	0	0.2	7.25182
332	4	0	-2	0	1	-0.2	6.81669
333	5	1	-2	0	-1	-0.2	5.44636
334	5	2	-2	-1	-1	0.2	5.51936
335	5	2	-2	-3	1	-0.2	5.69136
336	5	-1	0	1	-2	-0.2	5.39276
337	5	-4	2	0	0	-0.2	5.51045
338	6	-1	-4	2	0	-0.2	4.43732
339	6	-5	2	0	0	-0.2	4.59210
340	7	-4	-2	2	0	-0.2	3.83524
341	8	-2	-2	-1	0	-0.2	3.45130
342	9	-2	-4	0	0	0.2	3.03601
343	-2	3	0	1	1	-0.2	-14.38108
344	-2	3	0	3	-1	0.2	-15.61031
345	-2	4	0	1	0	-0.2	-14.44534
346	-2	5	0	1	-1	0.2	-14.51018
347	-2	5	0	-1	1	-0.2	-13.44218
348	-3	2	4	0	0	-0.2	-9.10973
349	-4	7	0	0	0	-0.2	-6.93297
350	0	5	-2	0	0	0.1	543.04774
351	0	-1	4	0	0	0.1	-1113.79737
352	1	1	0	0	1	-0.1	27.09242
353	1	-1	0	4	-1	0.1	21.16709
354	1	-2	-2	6	0	0.1	18.97395
355	1	-3	0	5	0	0.1	20.25838
356	2	-2	0	4	-1	0.1	11.97106
357	4	1	-4	2	0	0.1	6.54544
358	4	2	-2	-1	0	0.1	6.91661
359	5	1	0	-4	1	-0.1	5.80169
360	5	2	-4	0	0	-0.1	5.42850

Tabla 3.4: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$G_i^3 \times 10^{-5}$ (rad)	PERÍODO (días)
361	5	4	-2	-4	0	-0.1	5.76084
362	5	-1	-2	0	1	-0.1	5.46477
363	5	-3	0	2	-1	0.1	5.33183
364	7	1	-2	-3	0	-0.1	4.02256
365	8	0	0	-5	0	-0.1	3.58270
366	8	1	-4	-2	0	0.1	3.46944
367	8	-1	-2	-1	-1	-0.1	3.44762
368	8	-1	-2	-3	1	0.1	3.51395
369	8	-3	-2	1	-1	-0.1	3.39084
370	8	-3	-2	-1	1	0.1	3.45498
371	8	-4	0	0	-1	0.1	3.42970
372	9	0	-4	-2	0	0.1	3.08145
373	-2	1	0	3	1	-0.1	-15.46100
374	-2	1	0	5	-1	0.1	-16.89094
375	-2	3	2	1	-1	0.1	-14.32044
376	-2	3	2	-1	1	-0.1	-13.27919
377	-2	5	2	-2	0	-0.1	-12.91574
378	-3	2	2	2	0	-0.1	-9.61513
379	10	-1	0	-6	0	0.1	2.86308
380	11	-4	-2	-2	0	0.1	2.52402

Tabla 3.5: Desarrollo de $\left(\frac{a_S}{r_S}\right)^4 P_{31}(\text{sen } \beta_S)$ en λ_s .

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$G_i^1 \times 10^{-5}$ (rad)	PERÍODO (días)
1	0	0	0	1	0	-150083.7	365.24219
2	0	0	0	2	-1	-7519.4	182.62546
3	0	0	0	0	1	-2506.6	
4	0	0	0	3	-2	-235.6	121.75127
5	0	0	0	-1	2	-15.7	-365.27708
6	0	0	0	4	-3	-7.6	91.31382
7	0	0	0	5	-4	-0.2	73.05123
8	0	0	0	-2	3	0.1	-182.63418

Tabla 3.6: Desarrollo de $\left(\frac{a_S}{r_S}\right)^4 P_{33}(\text{sen } \beta_S)$ en $3\lambda_s$.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$G_i^3 \times 10^{-5}$ (rad)	PERÍODO (días)
1	0	0	0	3	0	1497480.8	121.74740
2	0	0	0	4	-1	125034.5	91.31164
3	0	0	0	2	1	-25180.3	182.61673
4	0	0	0	1	2	-3719.7	365.20730
5	0	0	0	5	-2	2868.4	73.04983
6	0	0	0	6	-3	158.9	60.87515
7	0	0	0	0	3	-126.0	
8	0	0	0	7	-4	7.1	52.17888
9	0	0	0	-1	4	-3.7	-365.31198
10	0	0	0	8	-5	0.2	45.65664
11	0	0	0	-2	5	-0.1	-182.64290

Tabla 3.7: Desarrollo de $\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^5 P_{40}(\sin \beta_M)$.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$H_i^0 \times 10^{-3} \text{ (rad)}$	PERÍODO (días)
1	0	0	0	0	0	361.0	
2	1	-1	0	0	0	99.2	27.55455
3	1	1	0	-2	0	28.8	31.81194
4	2	0	-2	0	0	14.9	13.60611
5	2	0	0	-2	0	13.9	14.76529
6	2	-2	0	0	0	10.9	13.77727
7	3	-1	-2	0	0	3.7	9.10846
8	0	2	0	-2	0	3.2	-205.89221
9	3	-1	0	-2	0	1.6	9.61372
10	3	-3	0	0	0	1.1	9.18485
11	0	0	2	-2	0	-0.6	-173.31004
12	3	1	-2	-2	0	0.6	9.53006
13	1	-1	-2	2	0	0.5	23.77462
14	2	2	0	-4	0	0.5	15.90597
15	1	1	-2	0	0	0.4	26.87829
16	3	1	0	-4	0	0.4	10.08460
17	4	-2	-2	0	0	0.4	6.84558
18	1	0	0	-1	0	-0.3	29.53059
19	1	-3	0	2	0	0.3	24.30219
20	4	0	-2	-2	0	0.3	7.08101
21	4	-2	0	-2	0	0.2	7.12709
22	0	2	-2	0	0	-0.1	1095.17505
23	1	0	0	0	-1	0.1	27.32168
24	1	-1	2	-2	0	-0.1	32.76364
25	2	-2	-2	2	0	0.1	12.76270
26	4	0	0	-4	0	0.1	7.38265
27	4	-4	0	0	0	0.1	6.88864

Tabla 3.8: Desarrollo de $\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^5 P_{41}(\sin \beta_M) \sin \lambda_m$.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$H_i^1 \times 10^{-3} \text{ (rad)}$	PERÍODO (días)
1	0	0	1	0	0	-331.2	-6798.38366
2	2	0	-1	0	0	326.9	13.63340
3	3	-1	-1	0	0	80.7	9.12068
4	-1	1	1	0	0	-45.2	-27.44332
5	1	-1	1	0	0	-44.7	27.66669
6	3	1	-1	-2	0	15.1	9.54344
7	0	0	-1	2	0	-15.0	177.84378
8	1	1	1	-2	0	-14.4	31.96150

Tabla 3.8: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$H_i^1 \times 10^{-3}$ (rad)	PERÍODO (días)
9	4	-2	-1	0	0	11.1	6.85248
10	2	0	1	-2	0	10.6	14.79743
11	-1	-1	1	2	0	-10.5	-31.66378
12	4	0	-1	-2	0	9.4	7.08839
13	1	1	-1	0	0	8.1	26.98498
14	1	-1	-1	2	0	7.2	23.85806
15	-2	0	1	2	0	-4.6	-14.73330
16	-2	2	1	0	0	-3.0	-13.74941
17	2	-2	1	0	0	-2.9	13.80525
18	3	-1	1	-2	0	2.7	9.62733
19	-2	0	3	0	0	-1.9	-13.57893
20	2	-2	-1	2	0	1.8	12.78671
21	4	0	-3	0	0	1.8	6.80987
22	5	-1	-1	-2	0	1.8	5.63802
23	0	2	1	-2	0	-1.7	-199.83997
24	-1	1	-1	2	0	-1.6	-32.60650
25	5	-3	-1	0	0	1.4	5.48774
26	0	2	-1	0	0	-1.3	1305.47920
27	0	-2	1	2	0	-1.0	212.32250
28	5	-1	-3	0	0	0.7	5.46038
29	0	0	1	1	-1	0.6	385.99833
30	0	0	1	-1	1	-0.6	-346.63579
31	2	0	-1	1	-1	-0.6	13.14284
32	2	0	-1	-1	1	0.6	14.16200
33	3	1	1	-4	0	0.6	10.09958
34	-1	-1	-1	4	0	-0.5	-38.74193
35	-3	1	3	0	0	-0.5	-9.09627
36	4	0	1	-4	0	0.4	7.39067
37	4	-2	1	-2	0	0.4	7.13457
38	-3	1	1	2	0	-0.4	-9.60014
39	2	2	1	-4	0	-0.3	15.94327
40	4	2	-1	-4	0	0.3	7.34113
41	5	1	-1	-4	0	0.3	5.79675
42	1	0	1	-1	0	0.2	29.65942
43	2	0	-3	2	0	-0.2	12.63914
44	3	0	-1	-1	0	-0.2	9.32727
45	3	1	-3	0	0	-0.2	9.04535
46	3	-1	-1	1	-1	-0.2	8.89848
47	3	-1	-1	-1	1	0.2	9.35426
48	3	-3	1	0	0	-0.2	9.19728
49	3	-3	-1	2	0	0.2	8.73379
50	6	-2	-1	-2	0	0.2	4.68036
51	6	-4	-1	0	0	0.2	4.57633
52	-2	0	-1	4	0	-0.2	-16.10216
53	-3	3	1	0	0	-0.2	-9.17246
54	0	0	3	-2	0	0.1	-169.00171
55	1	0	-1	1	0	-0.1	25.32536
56	1	3	-1	-2	0	-0.1	31.05519
57	1	-1	1	1	-1	0.1	25.71862
58	1	-1	1	-1	1	-0.1	29.93405
59	5	1	-3	-2	0	0.1	5.60914
60	6	0	-1	-4	0	0.1	4.78922
61	6	-2	-3	0	0	0.1	4.55728
62	-1	0	1	1	0	0.1	-29.40287
63	-1	1	1	1	-1	0.1	-29.67274
64	-1	1	1	-1	1	-0.1	-25.52549
65	-1	3	1	-2	0	-0.1	-24.21562
66	-1	3	-1	0	0	-0.1	-28.14868
67	-2	2	-1	2	0	-0.1	-14.93420
68	-2	-2	1	4	0	-0.1	-15.86884

Tabla 3.9: Desarrollo de $\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^5 P_{42}(\sin \beta_M) \cos 2\lambda_m$.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$H_t^2 \times 10^{-3} \text{ (rad)}$	PERÍODO (días)
1	2	0	0	0	0	-7189.0	13.66079
2	3	-1	0	0	0	-1764.8	9.13293
3	3	1	0	-2	0	-387.4	9.55685
4	4	0	0	-2	0	-249.3	7.09579
5	4	-2	0	0	0	-199.4	6.85939
6	1	1	0	0	0	-192.2	27.09252
7	1	-1	0	2	0	-174.6	23.94208
8	0	0	2	0	0	-120.0	-3399.19183
9	0	2	0	0	0	71.3	1615.74782
10	0	0	0	2	0	-48.3	182.62109
11	5	-1	0	-2	0	-46.1	5.64270
12	5	-1	-2	0	0	-41.2	5.46477
13	2	-2	0	2	0	-33.7	12.81080
14	2	0	0	1	-1	27.0	13.16829
15	2	0	0	-1	1	-27.0	14.19156
16	5	-3	0	0	0	-26.1	5.49218
17	-1	1	2	0	0	-16.1	-27.33298
18	1	-1	2	0	0	-15.9	27.77974
19	3	1	-2	0	0	10.6	9.05740
20	5	1	0	-4	0	-8.8	5.80170
21	4	2	0	-4	0	-8.4	7.34907
22	3	-1	0	1	-1	6.6	8.91014
23	3	-1	0	-1	1	-6.6	9.36715
24	2	0	-2	2	0	6.2	12.66268
25	6	-2	-2	0	0	-6.1	4.56034
26	3	0	0	-1	0	5.9	9.34009
27	5	1	-2	-2	0	-5.9	5.61377
28	6	-2	0	-2	0	-5.0	4.68358
29	6	0	-2	-2	0	-4.6	4.66364
30	1	3	0	-2	0	4.5	31.19770
31	2	0	2	-2	0	3.3	14.82971
32	6	0	0	-4	0	-3.1	4.79260
33	-1	1	0	2	0	3.1	-32.45086
34	-1	-1	2	2	0	-2.8	-31.51698
35	2	2	-2	0	0	2.7	13.49249
36	3	-3	0	2	0	-2.4	8.74502
37	3	0	0	0	-1	-1.7	9.10720
38	-2	2	0	2	0	1.4	-14.90147
39	-2	4	0	0	0	1.3	-13.89576
40	1	-1	0	1	1	-1.1	25.62152
41	1	-1	0	3	-1	1.1	22.46926
42	2	-2	2	0	0	1.1	13.83334
43	4	-1	0	-1	0	1.1	6.97559
44	7	-1	-2	-2	0	-1.1	3.98857
45	-2	2	2	0	0	1.1	-13.72166
46	3	1	0	-1	-1	1.0	9.31318
47	3	1	0	-3	1	-1.0	9.81362
48	3	-1	2	-2	0	1.0	9.64098
49	-2	0	2	2	0	-1.0	-14.70143
50	2	2	0	-2	0	-0.9	14.63159
51	3	-1	-2	2	0	-0.9	8.67575
52	0	2	2	-2	0	-0.8	-194.13338
53	0	4	0	-2	0	0.8	-235.96026
54	1	1	0	1	-1	0.8	25.22174
55	1	1	0	-1	1	-0.8	29.26306
56	4	-2	0	1	-1	0.8	6.73295
57	4	-2	0	-1	1	-0.8	6.99067
58	7	-3	-2	0	0	-0.8	3.91277
59	1	0	0	1	0	0.7	25.42006
60	4	2	-2	-2	0	0.7	7.05011

Tabla 3.9: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$H_i^2 \times 10^{-3}$ (rad)	PERÍODO (días)
61	4	0	0	-1	-1	0.6	6.96057
62	4	0	0	-3	1	-0.6	7.23637
63	4	-2	-2	2	0	-0.6	6.59824
64	-1	-1	0	4	0	0.6	-38.52241
65	2	-1	0	1	0	0.5	13.22215
66	7	-3	0	-2	0	-0.5	4.00315
67	0	0	0	1	1	-0.4	365.22475
68	0	0	0	3	-1	0.4	121.74933
69	0	0	2	1	-1	0.4	409.23379
70	0	0	2	-1	1	-0.4	-329.81899
71	0	1	0	1	0	-0.4	328.15251
72	2	1	0	-1	0	0.4	14.12953
73	4	0	-2	1	-1	0.4	6.69181
74	4	0	-2	-1	1	-0.4	6.94633
75	7	-1	0	-4	0	-0.4	4.08252
76	-3	3	0	2	0	0.3	-9.67126
77	0	1	0	0	1	0.2	3230.13064
78	0	-1	0	3	0	-0.2	126.51384
79	0	-2	0	4	0	0.2	96.77985
80	0	-2	2	2	0	-0.2	219.16739
81	1	0	0	0	1	-0.2	27.32148
82	1	-1	-2	4	0	0.2	21.03604
83	1	-3	0	4	0	0.2	21.44801
84	2	-2	0	1	1	-0.2	13.27645
85	2	-2	0	3	-1	0.2	12.37671
86	3	1	2	-4	0	0.2	10.11461
87	3	-3	2	0	0	0.2	9.20974
88	4	0	2	-4	0	0.2	7.39872
89	4	1	0	-3	0	0.2	7.22021
90	4	-1	0	0	-1	-0.2	6.84487
91	5	-1	-2	1	-1	0.2	5.38422
92	5	-1	-2	-1	1	-0.2	5.54777
93	6	0	-4	0	0	-0.2	4.54143
94	7	-5	0	0	0	-0.2	3.92680
95	8	-2	-2	-2	0	-0.2	3.48422
96	-2	0	4	0	0	-0.2	-13.55187
97	-3	3	2	0	0	0.2	-9.16010
98	-3	5	0	0	0	0.2	-9.23736
99	0	2	-2	2	0	-0.1	156.52111
100	1	0	2	-1	0	0.1	29.78939
101	1	3	-2	0	0	0.1	26.43848
102	2	2	2	-4	0	-0.1	15.98075
103	2	4	0	-4	0	0.1	15.75091
104	4	-2	2	-2	0	0.1	7.14207
105	4	-4	0	2	0	-0.1	6.63824
106	5	0	0	-3	0	0.1	5.72109
107	5	0	-2	-1	0	0.1	5.53827
108	5	-1	0	-1	-1	0.1	5.55685
109	5	-1	0	-3	1	-0.1	5.73124
110	5	-2	0	-1	0	0.1	5.56642
111	5	-3	0	1	-1	0.1	5.41082
112	5	-3	0	-1	1	-0.1	5.57602
113	6	2	0	-6	0	-0.1	4.90682
114	6	2	-2	-4	1	-0.1	4.77172
115	7	1	-2	-4	0	-0.1	4.06736
116	8	-4	-2	0	0	-0.1	3.42624
117	-1	0	0	3	0	-0.1	-35.22693
118	-1	2	0	1	0	-0.1	-30.08036
119	-1	-3	0	6	0	0.1	-47.38885
120	-2	-2	0	6	0	0.1	-17.42353
121	-3	1	0	4	0	0.1	-10.14794

Tabla 3.10: Desarrollo de $\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^5 P_{43}(\sin \beta_M) \sin 3\lambda_m$.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$H_1^3 \times 10^{-3}$ (rad)	PERÍODO (días)
1	2	0	1	0	0	4617.5	13.68830
2	4	0	-1	0	0	-4446.2	6.82354
3	5	-1	-1	0	0	-1600.2	5.46917
4	3	-1	1	0	0	1116.1	9.14522
5	3	1	-1	0	0	409.0	9.06948
6	3	1	1	-2	0	288.8	9.57031
7	5	1	-1	-2	0	-261.1	5.61841
8	6	-2	-1	0	0	-208.4	4.56340
9	6	0	-1	-2	0	-207.2	4.66684
10	2	2	-1	0	0	133.0	13.51932
11	0	2	1	0	0	-129.7	2119.47626
12	2	0	-1	2	0	126.4	12.68631
13	1	1	1	0	0	116.2	27.20092
14	1	-1	1	2	0	71.8	24.02670
15	4	0	1	-2	0	55.4	7.10321
16	7	-1	-1	-2	0	-50.6	3.99091
17	4	-2	1	0	0	43.9	6.86632
18	4	2	-1	-2	0	33.0	7.05743
19	3	-1	-1	2	0	-32.3	8.68683
20	7	-3	-1	0	0	-30.6	3.91502
21	2	0	1	1	-1	-26.0	13.19385
22	2	0	1	-1	1	26.0	14.22125
23	4	0	-1	1	-1	25.0	6.69840
24	4	0	-1	-1	1	-25.0	6.95344
25	-1	3	1	0	0	-22.6	-27.91750
26	4	-2	-1	2	0	-16.1	6.60465
27	0	0	3	0	0	14.2	-2266.12789
28	6	0	-3	0	0	-12.7	4.54447
29	2	-2	1	2	0	12.0	12.83499
30	5	-3	1	0	0	10.1	5.49662
31	5	-1	1	-2	0	-9.6	5.64738
32	1	3	-1	0	0	9.5	26.54170
33	0	0	1	2	0	9.4	187.66216
34	5	-1	-1	1	-1	9.0	5.38848
35	5	-1	-1	-1	1	-9.0	5.55231
36	1	3	1	-2	0	-8.3	31.34153
37	3	3	-1	-2	0	8.2	9.48740
38	7	1	-1	-4	0	-7.3	4.06980
39	4	2	1	-4	0	7.2	7.35702
40	8	-2	-1	-2	0	-6.5	3.48601
41	3	-1	1	1	-1	-6.3	8.92184
42	3	-1	1	-1	1	6.3	9.38007
43	7	-1	-3	0	0	-6.2	3.90108
44	6	2	-1	-4	0	-5.9	4.77507
45	8	-4	-1	0	0	-4.9	3.42797
46	3	0	1	-1	0	-4.6	9.35294
47	5	0	-1	-1	0	4.5	5.54279
48	-1	1	1	2	0	-3.6	-32.29669
49	1	-1	-1	4	0	3.5	21.10133
50	0	2	-1	2	0	-3.2	160.20966
51	6	0	1	-4	0	-3.2	4.79598
52	8	0	-1	-4	0	-3.0	3.54605
53	5	1	-3	0	0	2.8	5.44199
54	-2	4	1	0	0	-2.8	-13.86742
55	2	2	1	-2	0	2.4	14.66314
56	2	-2	-1	4	0	2.3	11.95000
57	3	1	-1	1	-1	-2.3	8.84974
58	3	1	-1	-1	1	2.3	9.30042
59	6	-2	1	-2	0	-2.3	4.68681
60	0	-2	1	4	0	-1.8	98.17748

Tabla 3.10: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$H_1^3 \times 10^{-3}$ (rad)	PERÍODO (días)
61	1	-1	3	0	0	1.8	27.89372
62	-1	1	3	0	0	1.8	-27.22353
63	-1	-1	1	4	0	-1.7	-38.30535
64	6	-4	1	0	0	1.6	4.58250
65	0	4	1	-2	0	-1.5	-228.04520
66	3	0	1	0	-1	1.4	9.11942
67	6	-2	-1	1	-1	1.4	4.50709
68	6	-2	-1	-1	1	-1.4	4.62114
69	5	0	-1	0	-1	-1.3	5.45993
70	4	0	-3	2	0	1.2	6.56506
71	6	-1	-1	-1	0	1.2	4.61454
72	1	-1	1	1	1	1.1	25.71845
73	1	-1	1	3	-1	-1.1	22.54377
74	3	1	1	-1	-1	-1.0	9.32595
75	3	1	1	-3	1	1.0	9.82781
76	5	3	-1	-4	0	1.0	5.77603
77	2	0	3	-2	0	-0.9	14.86213
78	3	-1	-1	1	1	-0.9	8.89846
79	3	-1	-1	3	-1	0.9	8.48504
80	5	1	-1	-1	-1	0.9	5.53330
81	5	1	-1	-3	1	-0.9	5.70618
82	7	-1	1	-4	0	-0.9	4.08498
83	8	-2	-3	0	0	-0.9	3.41727
84	1	1	3	-2	0	0.8	32.26488
85	2	2	-1	1	-1	-0.8	13.03679
86	2	2	-1	-1	1	0.8	14.03894
87	5	-3	-1	2	0	-0.8	5.32765
88	9	-3	-1	-2	0	-0.8	3.09451
89	0	2	1	1	-1	0.7	311.56596
90	0	2	1	-1	1	-0.7	-441.31330
91	1	1	1	1	-1	-0.7	25.31566
92	1	1	1	-1	1	0.7	29.38956
93	4	-1	1	-1	0	-0.7	6.98276
94	5	1	1	-4	0	-0.7	5.80665
95	6	0	-1	-1	-1	0.7	4.60796
96	6	0	-1	-3	1	-0.7	4.72724
97	7	1	-3	-2	0	-0.7	3.97642
98	8	0	-3	-2	0	-0.7	3.47495
99	1	1	-1	2	0	0.6	23.51090
100	2	4	-1	-2	0	0.6	14.46941
101	3	-3	1	2	0	-0.6	8.75629
102	3	-3	-1	4	0	0.6	8.33516
103	4	2	-3	0	0	0.6	6.78129
104	-2	2	1	2	0	-0.6	-14.86888
105	0	1	1	1	0	0.5	344.79551
106	0	4	-1	0	0	0.5	722.06821
107	2	0	-1	1	1	0.5	13.14279
108	2	0	-1	3	-1	-0.5	12.26048
109	2	1	1	-1	0	-0.5	14.15896
110	2	-2	3	0	0	-0.5	13.86155
111	3	0	-1	1	0	-0.5	8.87404
112	4	-2	1	1	-1	-0.5	6.73963
113	4	-2	1	-1	1	0.5	6.99787
114	7	-3	1	-2	0	-0.5	4.00550
115	9	-1	-1	-4	0	-0.5	3.14173
116	9	-5	-1	0	0	-0.5	3.04869
117	-1	3	-1	2	0	-0.5	-33.27806
118	-2	2	3	0	0	-0.5	-13.69402
119	0	0	1	1	1	0.4	385.95937
120	0	0	1	3	-1	-0.4	123.96945

Tabla 3.10: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$H_i^3 \times 10^{-3}$ (rad)	PERÍODO (días)
121	1	-3	1	4	0	-0.4	21.51589
122	2	1	-1	1	0	-0.4	13.08958
123	2	-1	1	1	0	-0.4	13.24792
124	-2	0	1	4	0	-0.4	-16.02624
125	-3	5	1	0	0	-0.4	-9.22483
126	0	0	-1	4	0	0.3	90.10039
127	1	0	1	1	0	0.3	25.51547
128	4	-1	-1	1	0	0.3	6.71231
129	4	-2	-1	1	1	-0.3	6.72628
130	4	-2	-1	3	-1	0.3	6.48735
131	5	-1	-3	2	0	0.3	5.30186
132	6	-1	-1	0	-1	-0.3	4.55697
133	6	-4	-1	2	0	-0.3	4.46445
134	0	1	1	0	1	-0.2	6154.17888
135	2	1	-1	0	1	0.2	13.57610
136	2	4	1	-4	0	-0.2	15.78749
137	2	-1	-1	3	0	-0.2	12.30715
138	2	-2	1	1	1	0.2	13.30243
139	2	-2	1	3	-1	-0.2	12.39929
140	3	1	-3	2	0	-0.2	8.61847
141	3	-1	3	-2	0	-0.2	9.65468
142	4	4	-1	-4	0	0.2	7.30793
143	5	-1	1	-1	-1	0.2	5.56140
144	5	-1	1	-3	1	-0.2	5.73607
145	6	2	1	-6	0	-0.2	4.91036
146	6	2	-3	-2	0	0.2	4.64703
147	7	1	1	-6	0	-0.2	4.16766
148	7	-1	-1	-1	-1	0.2	3.94777
149	7	-1	-1	-3	1	-0.2	4.03500
150	7	-3	-1	1	-1	0.2	3.87350
151	7	-3	-1	-1	1	-0.2	3.95744
152	9	-1	-3	-2	0	-0.2	3.08579
153	-1	-1	3	2	0	0.2	-31.37155
154	0	-1	1	3	0	0.1	128.91283
155	1	0	1	0	1	-0.1	27.43173
156	3	0	-1	0	1	0.1	9.09500
157	4	0	1	-1	-1	0.1	6.96771
158	4	0	1	-3	1	-0.1	7.24408
159	4	1	1	-3	0	-0.1	7.22789
160	4	2	-1	-1	-1	-0.1	6.92366
161	4	2	-1	-3	1	0.1	7.19648
162	4	-1	1	0	-1	0.1	6.85177
163	4	-4	1	2	0	0.1	6.64473
164	5	0	1	-3	0	0.1	5.72591
165	6	1	-1	-3	0	0.1	4.72033
166	7	-2	-1	-1	0	0.1	3.95260
167	9	-3	-3	0	0	-0.1	3.04023
168	-1	1	-1	4	0	-0.1	-39.69370
169	-1	2	1	1	0	0.1	-29.94785
170	-1	3	1	1	-1	0.1	-30.22787
171	-1	3	1	-1	1	-0.1	-25.93522
172	-1	5	1	-2	0	-0.1	-24.58407

Tabla 3.11: Desarrollo de $\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^5 P_{44}(\sin \beta_M) \cos 4\lambda_m$.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$H_1^4 \times 10^{-3} \text{ (rad)}$	PERÍODO (días)
1	4	0	0	0	0	99285.3	6.83040
2	5	-1	0	0	0	35275.8	5.47357
3	3	1	0	0	0	-9032.5	9.08160
4	5	1	0	-2	0	6557.6	5.62306
5	6	0	0	-2	0	5270.0	4.67004
6	2	2	0	0	0	-4888.1	13.54626
7	6	-2	0	0	0	2749.1	4.56647
8	7	-1	0	-2	0	1155.6	3.99325
9	4	2	0	-2	0	-870.7	7.06477
10	4	0	0	1	-1	-744.6	6.70501
11	4	0	0	-1	1	744.6	6.96056
12	1	3	0	0	0	-690.8	26.64573
13	3	-1	0	2	0	671.8	8.69795
14	7	-3	0	0	0	630.0	3.91728
15	2	0	2	0	0	415.7	13.71591
16	6	0	-2	0	0	375.3	4.54750
17	3	3	0	-2	0	-350.8	9.50066
18	2	0	0	2	0	-293.0	12.71003
19	5	-1	0	1	-1	-264.4	5.39276
20	5	-1	0	-1	1	264.4	5.55684
21	7	1	0	-4	0	196.5	4.07223
22	7	-1	-2	0	0	182.9	3.90332
23	6	2	0	-4	0	156.1	4.77843
24	4	-2	0	2	0	150.4	6.61108
25	5	0	0	-1	0	-116.4	5.54731
26	8	-4	0	0	0	116.1	3.42970
27	8	-2	0	-2	0	105.7	3.48780
28	3	-1	2	0	0	98.2	9.15754
29	5	1	-2	0	0	-84.9	5.44635
30	2	-2	0	4	0	-79.5	11.97104
31	8	0	0	-4	0	79.0	3.54790
32	0	4	0	0	0	-76.3	807.87391
33	3	1	0	1	-1	67.6	8.86128
34	3	1	0	-1	1	-67.6	9.31316
35	1	-1	0	4	0	-57.8	21.16703
36	1	1	0	2	0	-56.4	23.59249
37	2	4	0	-2	0	-46.7	14.50028
38	6	-1	0	-1	0	-40.4	4.61767
39	2	2	0	1	-1	36.6	13.06184
40	2	2	0	-1	1	-36.6	14.06800
41	5	0	0	0	-1	35.0	5.46432
42	3	-1	0	1	1	32.0	8.91012
43	3	-1	0	3	-1	-32.0	8.49564
44	3	1	2	-2	0	29.6	9.58380
45	5	3	0	-4	0	-29.4	5.78094
46	5	1	0	-1	-1	-27.3	5.53780
47	5	1	0	-3	1	27.3	5.71098
48	3	0	0	1	0	26.5	8.88563
49	8	-2	-2	0	0	25.2	3.41899
50	0	2	2	0	0	-24.0	3079.56784
51	7	1	-2	-2	0	23.4	3.97875
52	4	0	-2	2	0	-23.3	6.57141
53	8	0	-2	-2	0	23.3	3.47672
54	3	-3	0	4	0	-22.3	8.34539
55	5	-3	0	2	0	-20.8	5.33183
56	6	-2	0	1	-1	-20.2	4.51008
57	6	-2	0	-1	1	20.2	4.62428
58	6	0	0	-1	-1	-20.0	4.61109
59	6	0	0	-3	1	19.9	4.73053
60	4	2	-2	0	0	-19.5	6.78806

Tabla 3.11: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$H_A^4 \times 10^{-3}$ (rad)	PERÍODO (días)
61	9	-3	0	-2	0	15.3	3.09592
62	9	-5	0	0	0	12.1	3.05006
63	4	1	0	-1	0	11.6	6.94560
64	9	-1	0	-4	0	11.6	3.14318
65	4	-2	0	1	1	9.6	6.73294
66	4	-2	0	3	-1	-9.6	6.49354
67	4	4	0	-4	0	-9.5	7.31579
68	1	1	2	0	0	9.4	27.31019
69	-1	5	0	0	0	-8.9	-28.52755
70	3	0	0	0	1	-8.4	9.10718
71	4	-2	2	0	0	-8.3	6.87326
72	4	-1	0	1	0	7.8	6.71895
73	0	2	0	2	0	7.7	164.07625
74	2	0	0	1	1	7.2	13.16825
75	2	0	0	3	-1	-7.2	12.28263
76	9	-1	-2	-2	0	6.8	3.08719
77	5	-1	-2	2	0	-6.7	5.30600
78	6	2	-2	-2	0	-6.7	4.65021
79	6	-1	0	0	-1	6.0	4.56003
80	2	1	0	0	1	-5.9	13.60326
81	0	0	0	4	0	-5.1	91.31055
82	1	3	0	1	-1	4.8	24.83408
83	1	3	0	-1	1	-4.8	28.74250
84	2	-1	0	3	0	4.7	12.32947
85	5	-1	2	-2	0	-4.7	5.65208
86	-1	3	2	0	0	-4.4	-27.80332
87	4	0	2	-2	0	-4.3	7.11064
88	3	2	0	-1	0	4.0	9.28640
89	1	5	0	-2	0	-3.9	30.60673
90	4	2	0	-1	-1	3.9	6.93071
91	4	2	0	-3	1	-3.9	7.20411
92	6	1	0	-3	0	-3.9	4.72361
93	7	-1	0	-1	-1	-3.9	3.95007
94	7	-1	0	-3	1	3.9	4.03739
95	9	-3	-2	0	0	3.7	3.04159
96	-1	1	0	4	0	3.7	-39.46328
97	7	-2	0	-1	0	-3.5	3.95490
98	3	1	-2	2	0	3.2	8.62941
99	6	-4	0	2	0	-3.2	4.46738
100	2	0	2	1	-1	-3.1	13.21951
101	2	0	2	-1	1	3.1	14.25106
102	7	0	0	-3	0	-3.1	4.03236
103	1	-1	2	2	0	2.9	24.11191
104	6	0	-2	1	-1	-2.8	4.49158
105	6	0	-2	-1	1	2.8	4.60484
106	1	1	0	1	1	-2.6	25.22157
107	1	1	0	3	-1	2.6	22.16108
108	8	2	0	-6	0	2.6	3.61010
109	1	-3	0	6	0	-2.5	19.19379
110	4	-4	0	4	0	-2.3	6.40540
111	0	-2	0	6	0	-2.2	63.25692
112	5	-2	0	1	0	2.2	5.40177
113	1	3	2	-2	0	-1.7	31.48668
114	7	-3	0	1	-1	-1.7	3.87571
115	7	-3	0	-1	1	1.7	3.95974
116	10	-4	0	-2	0	1.7	2.78321
117	9	1	0	-6	0	1.6	3.19191
118	1	2	0	1	0	1.5	25.02633
119	3	3	0	-1	-1	1.4	9.25981
120	3	3	0	-3	1	-1.4	9.75438

Tabla 3.11: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$H_i^4 \times 10^{-3}$ (rad)	PERÍODO (días)
121	3	-2	0	3	0	1.4	8.51802
122	7	3	0	-6	0	1.4	4.15440
123	7	-1	-2	1	-1	-1.4	3.86204
124	7	-1	-2	-1	1	1.4	3.94548
125	2	-1	0	2	1	-1.3	12.76020
126	5	3	-2	-2	0	-1.3	5.59434
127	-2	2	0	4	0	1.3	-16.22543
128	1	0	0	3	0	1.2	22.31404
129	6	1	0	-2	-1	1.2	4.66331
130	2	2	-2	2	0	1.1	12.56422
131	3	5	0	-4	0	-1.0	9.96026
132	6	0	2	-4	0	-1.0	4.79937
133	10	-6	0	0	0	1.0	2.74609
134	0	0	2	2	0	-0.9	192.98942
135	4	2	2	-4	0	0.9	7.36499
136	10	-2	-2	-2	0	0.9	2.77615
137	9	1	-2	-4	0	0.8	3.13419
138	10	-4	-2	0	0	0.8	2.73922
139	1	2	0	0	1	-0.7	26.86717
140	2	2	2	-2	0	0.7	14.69484
141	3	-1	2	1	-1	-0.7	8.93356
142	3	-1	2	-1	1	0.7	9.39303
143	5	1	2	-4	0	-0.7	5.81162
144	7	0	0	-2	-1	0.7	3.98833
145	8	-1	0	-3	0	-0.7	3.51759
146	10	-2	0	-4	0	0.7	2.82135
147	0	2	0	1	1	-0.6	297.88958
148	0	2	0	3	-1	0.6	113.21816
149	2	1	0	1	0	-0.6	13.11483
150	2	-4	0	6	0	-0.6	11.31326
151	3	0	0	2	-1	0.6	8.67461
152	5	1	-2	1	-1	0.6	5.36633
153	5	1	-2	-1	1	-0.6	5.52879
154	5	-2	0	0	1	-0.6	5.48286
155	-1	3	0	2	0	0.6	-33.11596
156	-2	4	0	2	0	0.6	-15.04018
157	-2	4	2	0	0	-0.6	-13.83919
158	0	4	0	1	-1	0.5	251.53465
159	0	4	0	-1	1	-0.5	-666.68372
160	1	0	0	2	1	-0.5	23.76592
161	2	-2	0	3	1	0.5	12.37667
162	2	-2	0	5	-1	-0.5	11.59115
163	3	0	2	-1	0	-0.5	9.36582
164	4	1	0	-2	1	-0.5	7.08024
165	4	-1	0	2	-1	0.5	6.59758
166	5	2	0	-3	0	0.5	5.70091
167	5	-3	0	1	1	0.5	5.41081
168	5	-3	0	3	-1	-0.5	5.25512
169	8	2	-2	-4	0	0.5	3.53644
170	-1	-1	0	6	0	-0.5	-48.82074
171	-2	6	0	0	0	-0.5	-14.01631
172	0	0	4	0	0	0.4	-1699.59591
173	2	3	0	-1	0	0.4	14.00704
174	5	0	0	-2	1	-0.4	5.63286
175	5	-5	0	4	0	-0.4	5.19724
176	6	2	0	-3	-1	-0.4	4.71672
177	6	2	0	-5	1	0.4	4.84177
178	6	4	0	-6	0	-0.4	4.89196
179	6	-2	2	-2	0	-0.4	4.69004
180	7	0	-2	-1	0	-0.4	3.94067

Tabla 3.11: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$H_A^4 \times 10^{-3}$ (rad)	PERÍODO (días)
181	7	1	0	-3	-1	-0.4	4.02733
182	7	1	0	-5	1	0.4	4.11815
183	8	-3	0	-1	0	-0.4	3.45850
184	-1	1	2	2	0	-0.4	-32.14399
185	10	0	0	-6	0	0.4	2.86055
186	10	0	-2	-4	0	0.4	2.81410
187	0	1	0	3	0	-0.3	117.32707
188	0	6	0	-2	0	-0.3	-276.31230
189	0	-2	2	4	0	-0.3	99.61607
190	1	-1	0	3	1	0.3	22.46913
191	1	-1	0	5	-1	-0.3	20.00758
192	2	-2	2	2	0	0.3	12.85927
193	3	3	-2	0	0	-0.3	9.00691
194	3	-1	-2	4	0	-0.3	8.28228
195	4	0	2	-2	0	-0.3	7.11064
196	4	-2	-2	4	0	-0.3	6.36816
197	7	-1	2	-4	0	-0.3	4.08743
198	8	0	-4	0	0	0.3	3.40835
199	-1	-1	2	4	0	-0.3	-38.09073
200	0	2	2	1	-1	0.2	326.53067
201	0	2	2	-1	1	-0.2	-414.41198
202	2	4	0	-1	-1	0.2	13.94662
203	2	4	0	-3	1	-0.2	15.09971
204	2	4	-2	0	0	0.2	13.38075
205	3	2	0	-2	1	-0.2	9.52866
206	3	-2	0	2	1	-0.2	8.72141
207	3	-3	2	2	0	-0.2	8.76758
208	4	0	2	-1	-1	0.2	6.97485
209	4	0	2	-3	1	-0.2	7.25181
210	4	0	-2	1	1	-0.2	6.69180
211	4	0	-2	3	-1	0.2	6.45527
212	6	-3	0	1	0	0.2	4.51638
213	7	3	-2	-4	0	-0.2	4.05715
214	7	-3	2	-2	0	-0.2	4.00787
215	7	-5	0	2	0	0.2	3.84414
216	8	0	0	-3	-1	-0.2	3.51377
217	8	0	0	-5	1	0.2	3.58270
218	8	-1	-2	-1	0	-0.2	3.44761
219	8	-2	0	-1	-1	-0.2	3.45481
220	8	-2	0	-3	1	0.2	3.52142
221	8	-2	-2	1	-1	-0.2	3.38728
222	8	-2	-2	-1	1	0.2	3.45130
223	9	-1	-4	0	0	0.2	3.03316
224	-2	0	0	6	0	0.2	-17.61346
225	-3	3	0	4	0	0.2	-10.21207
226	11	-5	0	-2	0	0.2	2.52788
227	1	0	2	1	0	0.1	25.61159
228	1	3	-2	2	0	0.1	23.09497
229	1	-1	2	1	1	0.1	25.81611
230	1	-1	2	3	-1	-0.1	22.61878
231	3	0	2	0	-1	0.1	9.13167
232	3	1	2	-1	-1	-0.1	9.33877
233	3	1	2	-3	1	0.1	9.84204
234	3	2	0	0	-1	-0.1	9.05616
235	3	-3	0	3	1	0.1	8.54053
236	3	-3	0	5	-1	-0.1	8.15898
237	4	1	0	0	-1	-0.1	6.81599
238	4	2	-2	1	-1	0.1	6.66421
239	4	2	-2	-1	1	-0.1	6.91660
240	4	3	0	-3	0	0.1	7.18809

Tabla 3.11: Continuación.

	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	$H_1^4 \times 10^{-3}$ (rad)	PERÍODO (días)
241	4	-1	2	-1	0	-0.1	6.98993
242	4	-3	0	3	0	0.1	6.50661
243	5	0	-2	1	0	0.1	5.37526
244	5	5	0	-6	0	-0.1	5.94794
245	5	-1	-2	1	1	0.1	5.38421
246	5	-1	-2	3	-1	-0.1	5.23002
247	5	-3	-2	4	0	-0.1	5.17269
248	6	1	-2	-1	0	0.1	4.59829
249	6	-1	0	-2	1	-0.1	4.67680
250	6	-2	-2	2	0	-0.1	4.44924
251	7	0	-2	0	-1	0.1	3.89861
252	7	1	-4	0	0	-0.1	3.88945
253	7	-3	-2	2	0	-0.1	3.83069
254	8	-4	0	1	-1	-0.1	3.39779
255	8	-4	0	-1	1	0.1	3.46221
256	8	-6	0	2	0	0.1	3.37350
257	-3	5	0	2	0	0.1	-9.72950
258	11	-3	-2	-2	0	0.1	2.52205
259	11	-5	-2	0	0	0.1	2.49153
260	11	-7	0	0	0	0.1	2.49722

Capítulo 4

Series solución del movimiento de Rotación de la Tierra rígida

4.1 Introducción.

La inmensa mayoría de los problemas de la Mecánica no pueden resolverse de manera exacta. Esto impulsa a desarrollar métodos de resolución aproximados. Afortunadamente, sucede a menudo que en un problema físico que no se pueda resolver directamente, el Hamiltoniano sólo difiere ligeramente del Hamiltoniano correspondiente a un problema que pueda resolverse de manera rigurosa. Se dice entonces que el problema más complicado es una *perturbación* del problema soluble y la diferencia entre ambos Hamiltonianos se denomina *hamiltoniano de perturbación*. La teoría de perturbación consiste en técnicas para obtener soluciones aproximadas, basándose aquellas en la pequeñez del Hamiltoniano de perturbación. Hay que destacar, sin embargo, que aún cuando el cambio del Hamiltoniano debe ser pequeño, el efecto que pueda tener la perturbación sobre el movimiento puede ser grande.

4.2 Teorías canónicas de perturbación.

El desarrollo de la teoría de perturbación está ligado a los primeros tiempos de la Mecánica Celeste. Newton, se dio cuenta de que la mayoría de las oscilaciones del movimiento de la Luna se debían a pequeñas variaciones de la atracción solar en el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra. Sus intentos iniciales de una teoría lunar que incluyera dichos efectos correspondía aproximadamente a una forma de la teoría de perturbación.

Muchos desarrollos posteriores de la estructura formal de la Mecánica clásica, como la teoría canónica de Hamilton, necesitaron de nuevas técnicas de perturbación. La necesidad de predecir órbitas muy precisas para satélites artificiales y el enorme incremento de la capacidad de cálculos han impulsado recientemente aún más la teoría de perturbación.

Entre los métodos de perturbación más importantes desarrollados a lo largo de este siglo destacan el de von Zeipel (1916), que le sirvió a Brouwer (1959) para integrar el problema

de movimiento de un satélite artificial bajo la acción gravitatoria terrestre, en un sistema de variables de Delaunay. El método de von Zeipel presenta, sin embargo, varias desventajas. La más importante es que la función generatriz depende de las nuevas y antiguas variables y como consecuencia, la inversión de los resultados para obtener una solución en función de las coordenadas originales resulta ser un proceso tedioso y en algunos casos hasta imposible de realizar.

En las tres últimas décadas han surgido numerosos métodos de perturbación utilizados en la resolución de sistemas canónicos. Entre estos destacan los de Hori y Deprit que están basados en la transformación canónica de Lie [Hori 1966, Hori 1973], [Deprit 1969]. Estos métodos tienen la ventaja de que:

1. La función generatriz no es mezcla de las antiguas y nuevas coordenadas.
2. Están basados en el uso de los paréntesis de Poisson, y de ahí, las teorías son canónicamente invariantes.
3. Es posible expresar directamente cualquier función de las variables antiguas en términos de las nuevas variables.

La relación entre el método de Hori y el método de von Zeipel ha sido estudiada por el primero [Hori 1970]. La equivalencia entre los métodos de Hori y Deprit ha sido probada por Campbell y Jefferys [Campbell & Jefferys 1970] y Mersmann [Mersman 1970]. Este último también ha estudiado la conexión entre estas dos teorías y la de von Zeipel [Mersman 1971].

Una extensión de la teoría de Hori al estudio de sistemas no canónicos fue efectuada por el mismo autor en 1971 mientras que Kamel ha dado una generalización del método de Deprit en análogo sentido [Kamel 1969]. Choi y Tapley han desarrollado también una teoría de perturbación para sistemas dinámicos no conservativos que consiste en transformar cualquier sistema dinámico en otro canónico equivalente y aplicar cualquier método de perturbación canónica [Choi & Tapley 1973].

4.3 Resultados previos: Paréntesis de Poisson.

El *paréntesis de Poisson* de dos funciones u y v respecto a las variables canónicas (q, p) se define de la manera siguiente [Goldstein 1988, p. 484]:

$$\{u, v\}_{p,q} = \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \quad (4.3.1)$$

Una propiedad muy importante de los paréntesis de Poisson es que son *invariantes canónicos*, es decir, el paréntesis de Poisson siempre tiene el mismo valor cuando se calcule respecto a cualquier sistema canónico de variables. Por lo tanto, mientras se utilicen variables canónicas no es necesario el subíndice en los corchetes. Otras propiedades de interés [Goldstein 1988, p. 486-487]:

$$\begin{aligned}
\{u, u\} &= 0 & (a) \\
\{u, v\} &= \{v, u\} & (b) \\
\{au + bv, w\} &= a\{u, w\} + b\{v, w\} \quad (\text{linealidad}) & (c) \\
\{uv, w\} &= \{u, w\}v + u\{v, w\} & (d) \\
\{u, \{v, w\}\} + \{v, \{w, u\}\} + \{w, \{u, v\}\} &= 0 \quad (\text{Identidad de Jacobi}) & (e)
\end{aligned}$$

La identidad de Jacobi nos dice que la suma de las perturbaciones cíclicas del paréntesis doble de Poisson de tres funciones es nula y mediante esta identidad se observa que el *producto* de paréntesis de Poisson no es asociativo. Las propiedades (b), (c) y (e) definen un tipo particular de Álgebra no asociativa llamada *Álgebra de Lie* a la cual obedece el paréntesis de Poisson [Goldstein 1988, p. 488]. En el Capítulo anterior señalábamos que las transformaciones canónicas forman un grupo. Las transformaciones canónicas que sean funciones analíticas de parámetros continuos forman grupos separados que pertenecen a la clase conocida con el nombre de *grupos de Lie*.

4.4 El método de Hori. Derivación del efecto nutacional.

Las ecuaciones del movimiento rotacional de la Tierra rígida son [Kinoshita 1977, p. 285]:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(L, G, H) &= -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial(l, g, h)} \\
\frac{d}{dt}(l, g, h) &= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial(L, G, H)}
\end{aligned} \tag{4.4.2}$$

siendo \mathcal{K} el Hamiltoniano:

$$\mathcal{K} = T + U + E \tag{4.4.3}$$

Las expresiones de T, U y E están dadas en el Capítulo 2.

La energía potencial $U = U_1 + U_2$, sólo depende de l y g , además de las variables angulares que aparecen en el movimiento de la Luna y el Sol. U no depende explícitamente del tiempo t . E representa el efecto debido al movimiento de la eclíptica originado por las perturbaciones planetarias.

Escribimos el Hamiltoniano \mathcal{K} como suma de los términos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_0 &= T + E \\
\mathcal{K}_1 &= U
\end{aligned} \tag{4.4.4}$$

\mathcal{K}_1 es el Hamiltoniano de perturbación y es función de un pequeño parámetro J . El sistema de ecuaciones diferenciales (4.4.2) se puede resolver directamente si $U = 0$ (que es el caso de que no existiera la acción de la Luna y el Sol). Aunque U no depende explícitamente del tiempo t si depende implícitamente pues es función de las variables angulares que aparecen en el movimiento de la Luna y el Sol y éstas son funciones del tiempo. Podemos escribir entonces:

$$\mathcal{K}_1 = U = U_{sec} + U_{per} \quad (4.4.5)$$

donde los subíndices sec y per representan la parte secular y la parte periódica de la función U , respectivamente.

Nuestro objetivo es separar la nutación de la precesión, es decir, los términos periódicos de los seculares. Por lo tanto, parece lógico buscar una transformación canónica:

$$(h, g, l, H, G, L) \longrightarrow (h^*, g^*, l^*, H^*, G^*, L^*)$$

$$\text{HAMILTONIANO:} \quad \mathcal{K} \quad \mathcal{K}^*$$

en la que podamos eliminar el parámetro tiempo del nuevo Hamiltoniano \mathcal{K}^* .

G. Hori (1966) obtuvo un algoritmo para la determinación de este nuevo Hamiltoniano junto con la función generatriz W , de forma recurrente. El resultado es [Hori 1966, p. 291]:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^* &= \mathcal{K}_0^* + \mathcal{K}_1^* + \mathcal{K}_2^* + \dots \\ W &= W_1 + W_2 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ORDEN 0 : } \mathcal{K}_0^* &= \mathcal{K}_0 = T + E \\ \text{ORDEN 1 : } \mathcal{K}_1^* &= \mathcal{K}_{1sec} = U_{1sec} \\ W_1 &= \int \mathcal{K}_{1per} dt = \int U_{1per} dt \\ \text{ORDEN 2 : } \mathcal{K}_2^* &= U_{2sec} + \frac{1}{2} \{U_1 + \mathcal{K}_1^*, W_1\}_{sec} \\ W_2 &= \int U_{2per} dt + \frac{1}{2} \int \{U_1 + \mathcal{K}_1^*, W_1\}_{per} dt \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

donde el corchete $\{ \dots, \dots \}$ representa el paréntesis de Poisson. Se observa que estas ecuaciones están en invarianza canónica en virtud de la invarianza canónica de los paréntesis de Poisson. \mathcal{K}_k^* y W_k determinados por (4.4.6) están entonces en invarianza canónica.

Las diferencias entre las nuevas y las antiguas variables están dadas, al segundo orden por [Hori 1966, p. 268], [Hori 1973, p. 235]:

$$\Delta(L, G, H) = (L, G, H) - (L^*, G^*, H^*) = -\frac{\partial(W_1 + W_2)}{\partial(l^*, g^*, h^*)} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial(l^*, g^*, h^*)}, W_1 \right\}$$

$$\Delta(l, g, h) = (l, g, h) - (l^*, g^*, h^*) = \frac{\partial(W_1 + W_2)}{\partial(L^*, G^*, H^*)} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial(L^*, G^*, H^*)}, W_1 \right\} \quad (4.4.7)$$

La presente teoría de perturbaciones es independiente del grupo particular de variables canónicas utilizadas. El nuevo Hamiltoniano y la función generatriz asociada obtenida en términos de un cierto grupo de variables canónicas dan directamente los comportamientos de cualquier otro grupo de variables o funciones de ellas en virtud de (4.4.7) (*Teorema de Lie (1888)*).

4.5 Perturbaciones de primer orden.

Las perturbaciones periódicas de primer orden de $\phi = l + g$ (ángulo rotacional de la Tierra, medido desde el equinoccio verdadero hasta el meridiano cero sobre el ecuador), h (longitud del equinoccio verdadero) e I (inclinación del ecuador momento angular en el plano de la eclíptica) se obtienen a partir de (4.4.7) [Kinoshita 1977], [Aoki & Kinoshita 1983]:

$$\begin{aligned} \Delta_1 h &= -\frac{1}{G \sin I} \frac{\partial W_1}{\partial I} \\ \Delta_1 I &= \frac{1}{G} \left(\frac{1}{\sin I} \frac{\partial W_1}{\partial h} - \cot I \frac{\partial W_1}{\partial g} \right) \\ \Delta_1 \phi &= -\cos I \Delta_1 h \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

en donde los asteriscos utilizados para las variables canónicas transformadas se omiten por simplicidad. Las variables que aparecen en los segundos miembros de las ecuaciones son las nuevas.

A partir de (4.4.6), tenemos para la Luna:

$$\text{ORDEN 0 : } \mathcal{K}_0^* = \mathcal{K}_0 = T + E \quad (4.5.9)$$

$$\text{ORDEN 1 : } \mathcal{K}_1^* = \frac{3\kappa^2 M_M}{a_M^3} \frac{2C - A - B}{24} (3 \cos^2 J - 1)(3 \cos^2 I - 1) A_{(0,0,0,0,0)}^0 \quad (4.5.10)$$

$$W_1 = W_S + W_A \quad (4.5.11)$$

En esta última expresión:

$$W_S = \frac{1}{2}(3 \cos^2 J - 1) W_S^{(0)} - \frac{1}{2} \sin 2J W_S^{(1)} + \frac{1}{4} \sin^2 J W_S^{(2)} \quad (4.5.12)$$

con,

$$W_S^{(0)} = k' \sum_{i \neq 0} \frac{B_i}{N_i} \operatorname{sen} \chi_i \quad (4.5.13)$$

$$W_S^{(1)} = k' \sum_i \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{C_i(\epsilon)}{n_g - \epsilon N_i} \operatorname{sen}(g - \epsilon \chi_i) \quad (4.5.14)$$

$$W_S^{(2)} = k' \sum_i \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{D_i(\epsilon)}{2n_g - \epsilon N_i} \operatorname{sen}(2g - \epsilon \chi_i) \quad (4.5.15)$$

$$k' = \frac{3\kappa^2 M_{M,S}}{a_{M,S}^3} \frac{2C - A - B}{2} \quad (\text{Luna, Sol}) \quad (4.5.16)$$

$$N_i = \frac{d\chi_i}{dt} = i_1 n_{l_M} + i_2 n_{g_M} + i_3 n_{h_M} + i_4 n_{l_S} + i_5 n_{g_S} \quad (4.5.17)$$

y

$$W_A = \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 J W_A^{(0)} + \sum_{\rho=\pm 1} \rho \operatorname{sen} J (1 + \rho \cos J) W_A^{(1)} + \frac{1}{4} \sum_{\rho=\pm 1} (1 + \rho \cos J)^2 W_A^{(2)} \quad (4.5.18)$$

con,

$$W_A^{(0)} = \frac{B - A}{2C - A - B} \frac{k'}{2} \sum_i \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{B_i}{2n_l - \epsilon N_i} \operatorname{sen}(2l - \epsilon \chi_i) \quad (4.5.19)$$

$$W_A^{(1)} = \frac{B - A}{2C - A - B} \frac{k'}{2} \sum_i \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{C_i(\epsilon)}{n_g + 2\rho n_l - \epsilon N_i} \operatorname{sen}(2\rho l + g - \epsilon \chi_i) \quad (4.5.20)$$

$$W_A^{(2)} = \frac{B - A}{2C - A - B} \frac{k'}{2} \sum_i \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{D_i(\epsilon)}{2n_g + 2\rho n_l - \epsilon N_i} \operatorname{sen}(2\rho l + 2g - \epsilon \chi_i) \quad (4.5.21)$$

En las expresiones anteriores, hemos considerado la oblicuidad I constante.

4.5.1 Perturbación periódica debida a W_S .

Nutación del plano perpendicular al eje momento angular.

Las expresiones que hemos obtenido hasta el primer orden en J son:

$$\Delta_S h = -k \sum_{i \neq 0} \left\{ \frac{E_i}{N_i} - \frac{B_i}{N_i^2} (i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5) n_h \tan I \right\} \operatorname{sen} \chi_i \quad (4.5.22)$$

$$\Delta_S I = -\frac{k}{\operatorname{sen} I} \sum_{i \neq 0} (i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5) \frac{B_i}{N_i} \cos \chi_i \quad (4.5.23)$$

siendo,

$$E_i = \left[-A_i^0 - \frac{1}{6} A_i^2 \right] \cos I - \frac{1}{3} \frac{\cos 2I}{\sin I} A_i^1 \quad (4.5.24)$$

$$k = \frac{k'}{G} \approx \frac{3\kappa^2 M_{M,S}}{a_{M,S}^3 C\omega_E} \frac{2C - A - B}{2} \quad (\text{Luna, Sol}) \quad (4.5.25)$$

Las nutaciones en longitud y en oblicuidad del eje momento angular reciben el nombre de *términos de Poisson* pues $\Delta_S h$ y $\Delta_S I$ satisfacen exactamente las ecuaciones de Poisson en las perturbaciones periódicas de primer orden.

Las expresiones (4.5.22) y (4.5.23) son similares a las obtenidas por [Kinoshita 1977]. La única diferencia es que en nuestro caso aparece la suma de los cinco coeficientes de los argumentos que componen χ_i (n_Ω está incluido en los movimientos medios de las cinco variables (l_M, g_M, h_M, l_S, g_S)). Como vimos en el Capítulo anterior, la suma de estos coeficientes verifica una serie de relaciones que simplificarán el cálculo de los coeficientes numéricos.

Nutación del ecuador de figura.

La relación entre la longitud h_f y la oblicuidad I_f del ecuador de figura con sus correspondientes para el ecuador momento angular se puede obtener a partir del triángulo QPR de la figura 2.1 del Capítulo 2. Al desarrollar por Taylor, las relaciones finales son [Moritz & Mueller 1987]:

$$\begin{aligned} I_f &= I + J \cos g \\ h_f &= h + \frac{J}{\sin I} \sin g \end{aligned} \quad (4.5.26)$$

Las ecuaciones (4.5.26) se utilizan para hallar los términos de nutación en longitud y en oblicuidad del ecuador de figura. Las expresiones obtenidas son, hasta el primer orden en J :

$$\Delta_S h_f = \Delta_S h + \frac{k}{\sin I} \sum_i \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{\epsilon C_i(\epsilon)}{n_g - \epsilon N_i} \sin \chi_i \quad (4.5.27)$$

$$\Delta_S I_f = \Delta_S I + k \sum_i \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{C_i(\epsilon)}{n_g - \epsilon N_i} \cos \chi_i \quad (4.5.28)$$

Nutación del plano normal al eje de rotación.

La relación entre la longitud h_r y la oblicuidad I_r del plano normal al eje de rotación con sus correspondientes para el ecuador momento angular viene dada por [Kinoshita 1977]:

$$I_r = I + \left(1 - \frac{C}{2A} - \frac{C}{2B}\right) J \cos g \quad (4.5.29)$$

$$h_r = h + \left(1 - \frac{C}{2A} - \frac{C}{2B}\right) \frac{J}{\sin I} \sin g$$

Entonces, la nutación en longitud y en oblicuidad del eje perpendicular al eje de rotación viene dada por:

$$\Delta_S h_r = \Delta_S h + \left(1 - \frac{C}{2A} - \frac{C}{2B}\right) \frac{k}{\sin I} \sum_i \sum_{\varepsilon=\pm 1} \frac{\varepsilon C_i(\varepsilon)}{n_g - \varepsilon N_i} \sin \chi_i \quad (4.5.30)$$

$$\Delta_S I_r = \Delta_S I + \left(1 - \frac{C}{2A} - \frac{C}{2B}\right) k \sum_i \sum_{\varepsilon=\pm 1} \frac{C_i(\varepsilon)}{n_g - \varepsilon N_i} \cos \chi_i \quad (4.5.31)$$

Los segundos términos de las expresiones (4.5.27), (4.5.28), (4.5.30) y (4.5.31) se denominan *términos Oppolzer* y tienen el mismo argumento que los términos de Poisson. También se observa que los términos Oppolzer del eje de rotación son más pequeños que los del eje de figura, pues los primeros están multiplicados por el factor $(1 - C/2A - C/2B) \approx 1/300$.

Perturbaciones periódicas del movimiento del polo.

El movimiento del polo se define como el movimiento del eje de rotación respecto al eje de figura [Kinoshita 1977]:

$$\begin{aligned} x_p &= \frac{G}{A\omega} \sin J \sin l \\ y_p &= -\frac{G}{B\omega} \sin J \cos l \end{aligned} \quad (4.5.32)$$

Las perturbaciones periódicas del movimiento del polo son:

$$\begin{aligned} \Delta_S x_p &= \frac{C}{A} \Delta_S (J \sin l) \\ \Delta_S y_p &= -\frac{C}{B} \Delta_S (J \cos l) \end{aligned} \quad (4.5.33)$$

siendo

$$\Delta_S (J \sin l) = k \sum_{\varepsilon=\pm 1} \sum_i \frac{C_i(\varepsilon)}{n_g - \varepsilon N_i} \sin(g + l - \varepsilon \chi_i) \quad (4.5.34)$$

$$\Delta_S(J \cos l) = k \sum_{\varepsilon=\pm 1} \sum_i \frac{C_i(\varepsilon)}{n_g - \varepsilon N_i} \cos(g + l - \varepsilon \chi_i) \quad (4.5.35)$$

Los términos principales para las perturbaciones lunisulares del movimiento del polo en función de las variables utilizadas en este trabajo se pueden encontrar en [Folgueira & Sevilla 1996].

Las constantes numéricas y su influencia en los coeficientes de los términos de nutación.

Los factores de escala k correspondientes a la Luna y al Sol dados en (4.5.25), que denotaremos de ahora en adelante por $k_M^{J_2}$ y $k_S^{J_2}$ respectivamente, y que aparecen en los términos de la nutación se calculan a partir de las expresiones [Kinoshita 1977]:

$$\begin{aligned} k_M^{J_2} &= 3H_d \left(\frac{M_M}{M_M + M_E} \right) \left(\frac{n_M^2}{\omega_E} \right) \\ k_S^{J_2} &= 3H_d \left(\frac{M_S}{M_S + M_M + M_E} \right) \left(\frac{n_E^2}{\omega_E} \right) \end{aligned} \quad (4.5.36)$$

siendo M_S , M_E y M_M las masas del Sol, Tierra y Luna, respectivamente; n_M y n_E los movimientos medios de la Luna y del baricentro Tierra-Luna y ω_E la velocidad angular de rotación de la Tierra. H_d es la elipticidad o aplanamiento dinámico de la Tierra, cuya expresión es:

$$H_d = \frac{C - \frac{1}{2}(A + B)}{C} \quad (4.5.37)$$

Esta constante se determina a partir del actual valor observado de la constante de precesión: $p = 50''.2877/\text{año}$, corregida por efectos planetarios (directos e indirectos), de segundo orden, relativistas, etc. [Williams 1994], [Williams 1995], [Souchay *et al.* 1995], [Souchay & Kinoshita 1996], [Dehant & Capitaine 1997], [Dehant *et al.* 1997a], [Fukushima 1991].

El valor que hemos encontrado para la constante H_d es igual a 0.00327382. Por supuesto, como se explicó en [Dehant *et al.* 1997b], cada teoría de nutación de la Tierra rígida obtendrá su propio valor de H_d . Estos valores, para la actual constante de precesión, están variando sólo en el sexto decimal. Sustituyendo el valor de la elipticidad dinámica terrestre obtenemos los siguientes valores numéricos para los factores de escala $k_M^{J_2}$ y $k_S^{J_2}$:

$$\begin{aligned} k_M^{J_2} &= 7546''.819838/\text{siglo} \\ k_S^{J_2} &= 3475''.258549/\text{siglo} \end{aligned} \quad (4.5.38)$$

valores muy próximos a los obtenidos recientemente por [Souchay & Kinoshita 1996].

4.5.2 Perturbación periódica debida a W_A .

Discutiremos ahora la perturbación periódica debida a la triaxialidad de la Tierra en el potencial. Esta perturbación está caracterizada por la razón:

$$R = \frac{B - A}{2C - A - B} \approx 0.003272$$

Kinoshita (1977) mostró que esta razón produce algunos términos de la nutación que no podían despreciarse en el orden de precisión con que él trabajaba (0.1 *mas* - milisegundos de arco -) y calculó la correspondiente perturbación para los 3 términos mayores. Posteriormente, Kinoshita y Souchay (1990) con la ampliación de la teoría de segundo orden, y considerando un nivel de precisión de 5 *μas* - microsegundos de arco -, encontraron 7 términos. Recientemente, Souchay y Kinoshita (1996) han calculado los coeficientes de 34 términos hasta un orden de precisión de 0.01 *μas* [Souchay & Kinoshita 1996].

Nutación del plano normal al eje momento angular.

Las expresiones encontradas son:

$$\Delta_A h = -\frac{B - A}{2C - A - B} \frac{k_{M,S}^{J_2}}{\sin I} \sum_i \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{C_i(\epsilon)}{2n_g + 2n_l - \epsilon N_i} \sin(2g + 2l - \epsilon \chi_i) \quad (4.5.39)$$

$$\Delta_A I = -\frac{B - A}{2C - A - B} k_{M,S}^{J_2} \sum_i \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{C_i(\epsilon)}{2n_g + 2n_l - \epsilon N_i} \cos(2g + 2l - \epsilon \chi_i) \quad (4.5.40)$$

4.5.3 Efectos del cambio secular de la oblicuidad sobre los términos de nutación.

El valor convencional adoptado para la oblicuidad del ecuador sobre la eclíptica de la fecha, I es [Kinoshita & Souchay 1990a]:

$$I = -23^\circ 26' 21''.448 + 46''.815 T = I_0 + \Delta I T \quad (4.5.41)$$

En los desarrollos anteriores así como en los trabajos de Kinoshita (1977) y Kinoshita & Souchay (1990) se ha considerado la oblicuidad I constante ($I = I_0$). En esta sección vamos a incluir la variación secular de I en los términos de nutación.

Las funciones características (4.5.12) y (4.5.18) variarán de la forma:

$$\Delta W_S = \frac{1}{2}(3 \cos^2 J - 1) \Delta W_S^{(0)} - \frac{1}{2} \sin 2J \Delta W_S^{(1)} + \frac{1}{4} \sin^2 J \Delta W_S^{(2)} \quad (4.5.42)$$

$$\Delta W_A = \frac{3}{2} \sin^2 J \Delta W_A^{(0)} + \sum_{\rho=\pm 1} \sin J (1 + \rho \cos J) \Delta W_A^{(1)} + \frac{1}{4} \sum_{\rho=\pm 1} (1 + \rho \cos J)^2 \Delta W_A^{(2)} \quad (4.5.43)$$

Aquí sólo consideraremos la perturbación debida a ΔW_S puesto que en ΔW_A aparece el producto $R \Delta I \approx 7.43 \times 10^{-7} \text{ rad}$, siendo R el factor que caracteriza la triaxialidad de la Tierra, por lo tanto, su efecto es casi despreciable.

Las expresiones de $\Delta W_S^{(0)}$, $\Delta W_S^{(1)}$ y $\Delta W_S^{(2)}$ en (4.5.42) tienen la forma:

$$\Delta W_S^{(0)} = k' \sum_{i \neq 0} B'_i \int_0^T \sin(\Delta I t) \cos \chi_i dt \quad (4.5.44)$$

$$\Delta W_S^{(1)} = k' \sum_i \sum_{\epsilon=\pm 1} C'_i(\epsilon) \int_0^T \sin(\Delta I t) \cos(g - \epsilon \chi_i) dt \quad (4.5.45)$$

$$\Delta W_S^{(2)} = k' \sum_i \sum_{\epsilon=\pm 1} D'_i(\epsilon) \int_0^T \sin(\Delta I t) \cos(2g - \epsilon \chi_i) dt \quad (4.5.46)$$

con,

$$\begin{aligned} B'_i &= -\frac{1}{2} \sin 2I_0 A_i^0 - \frac{1}{3} \cos 2I_0 A_i^1 - \frac{1}{12} \sin 2I_0 A_i^2 \\ C'_i(\epsilon) &= \frac{1}{2} \cos 2I_0 A_i^0 - \frac{1}{6} \epsilon (1 + 4\epsilon \cos I_0) \sin I_0 A_i^1 + \frac{1}{12} \epsilon (\cos I_0 + \epsilon \cos(2I_0)) A_i^2 \\ D'_i(\epsilon) &= \frac{1}{2} \sin 2I_0 A_i^0 + \frac{1}{3} \epsilon (\cos I_0 + \epsilon \cos(2I_0)) A_i^1 + \frac{1}{6} \epsilon \sin I_0 (1 + \epsilon \cos I_0) A_i^2 \end{aligned} \quad (4.5.47)$$

Integrando y después de algunos cálculos, simplificaciones y aproximaciones:

$$\Delta W_S^{(0)} \approx k' \sum_{i \neq 0} B'_i \left\{ \frac{\Delta I}{N_i^2} \cos \chi_i + \frac{\Delta I T}{N_i} \sin \chi_i \right\} \quad (4.5.48)$$

$$\Delta W_S^{(1)} \approx k' \sum_i \sum_{\epsilon=\pm 1} C'_i(\epsilon) \left\{ \frac{\Delta I}{(n_g - \epsilon N_i)^2} \cos(g - \epsilon \chi_i) + \frac{\Delta I T}{n_g - \epsilon N_i} \sin(g - \epsilon \chi_i) \right\} \quad (4.5.49)$$

$$\Delta W_S^{(2)} \approx k' \sum_i \sum_{\epsilon=\pm 1} D'_i(\epsilon) \left\{ \frac{\Delta I}{(2n_g - \epsilon N_i)^2} \cos(2g - \epsilon \chi_i) + \frac{\Delta I T}{2n_g - \epsilon N_i} \sin(2g - \epsilon \chi_i) \right\} \quad (4.5.50)$$

Nutación del plano perpendicular al eje momento angular.

Las expresiones a las que hemos llegado son:

$$\Delta_S^{\Delta I} h = -k_{M,S}^{J_2} \sum_{i \neq 0} E'_i \left\{ \frac{\Delta I}{N_i^2} \cos \chi_i + \frac{\Delta I T}{N_i} \sin \chi_i \right\} \quad (4.5.51)$$

$$\Delta_S^{\Delta I} I = -\frac{k_{M,S}^{J_2}}{\sin I_0} \sum_{i \neq 0} (i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5) B'_i \left\{ \frac{-\Delta I}{N_i^2} \sin \chi_i + \frac{\Delta I T}{N_i} \cos \chi_i \right\} \quad (4.5.52)$$

siendo,

$$E'_i = \left[-A_i^0 - \frac{1}{6} A_i^2 \right] \frac{\cos 2I_0}{\sin I_0} + \frac{4}{3} \cos I_0 A_i^1 \quad (4.5.53)$$

Nutación del ecuador de figura.

Las relaciones obtenidas son, hasta el primer orden en J :

$$\Delta_S^{\Delta I} h_f = \Delta_S^{\Delta I} h + \frac{k_{M,S}^{J_2}}{\sin I_0} \sum_i \sum_{\varepsilon=\pm 1} C'_i(\varepsilon) \left\{ \frac{-\Delta I}{(n_g - \varepsilon N_i)^2} \cos \chi_i + \frac{\varepsilon \Delta I T}{n_g - \varepsilon N_i} \sin \chi_i \right\} \quad (4.5.54)$$

$$\Delta_S^{\Delta I} I_f = \Delta_S^{\Delta I} I + k_{M,S}^{J_2} \sum_i \sum_{\varepsilon=\pm 1} C'_i(\varepsilon) \left\{ \frac{\varepsilon \Delta I}{(n_g - \varepsilon N_i)^2} \sin \chi_i + \frac{\Delta I T}{n_g - \varepsilon N_i} \cos \chi_i \right\} \quad (4.5.55)$$

Nutación del plano normal al eje de rotación.

La nutación en longitud y en oblicuidad del plano perpendicular al eje de rotación correspondiente al efecto del cambio secular en oblicuidad, viene dada por:

$$\Delta_S^{\Delta I} h_r = \Delta_S^{\Delta I} h + \left(1 - \frac{C}{2A} - \frac{C}{2B} \right) \frac{k_{M,S}^{J_2}}{\sin I_0} \sum_i \sum_{\varepsilon=\pm 1} C'_i(\varepsilon) \left\{ \frac{-\Delta I}{(n_g - \varepsilon N_i)^2} \cos \chi_i + \frac{\varepsilon \Delta I T}{n_g - \varepsilon N_i} \sin \chi_i \right\} \quad (4.5.56)$$

$$\Delta_S^{\Delta I} I_r = \Delta_S^{\Delta I} I + \left(1 - \frac{C}{2A} - \frac{C}{2B} \right) k_{M,S}^{J_2} \sum_i \sum_{\varepsilon=\pm 1} C'_i(\varepsilon) \left\{ \frac{\varepsilon \Delta I}{(n_g - \varepsilon N_i)^2} \sin \chi_i + \frac{\Delta I T}{n_g - \varepsilon N_i} \cos \chi_i \right\} \quad (4.5.57)$$

4.6 Perturbaciones de segundo orden debidas a la Luna.

4.6.1 Términos de nutación que provienen de $U_2^{J_3}$.

La función generatriz asociada al potencial $U_2^{J_3}$ se puede calcular a partir de la integral:

$$W_2^{J_3} = \int U_{per}^{J_3} dt \approx W_{30}^{(0,0)} + W_{30}^{(0,1)} \quad (4.6.58)$$

siendo $W_{30}^{(0,m')}$ la parte de la función generatriz relacionada con la función $P_{30}^{(0,m')}$ calculada en el Capítulo anterior.

Nutación del plano perpendicular al eje momento angular.

Puesto que $P_{30}^{(0,0)}$ no tiene $\sin J$ como factor, la función $W_{30}^{(0,0)}$ será la única que contribuirá al cálculo de los términos de Poisson que provienen de $U_2^{J_3}$. Entonces, los términos de nutación correspondientes al ecuador momento angular vienen dados por las expresiones, [Kinoshita & Souchay 1990a]:

$$\Delta_2^{J_3} h = \Delta_{30}^{(0,0)} h = -k_M^{J_3} \sum_i \frac{F_i^{J_3}}{N_i} \cos \chi_i \quad (4.6.59)$$

$$\Delta_2^{J_3} I = \Delta_{30}^{(0,0)} I = k_M^{J_3} \sum_i \frac{I_i^{J_3}}{N_i} \sin \chi_i \quad (4.6.60)$$

siendo,

$$F_i^{J_3} = \left[-\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \cos^2 I \right] G_i^0 + \left[\frac{1}{3} \cot I - \frac{5}{8} \sin 2I \right] G_i^1 + \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{4} \sin^2 I \right] G_i^2 - \frac{1}{48} \sin 2I G_i^3 \quad (4.6.61)$$

$$I_i^{J_3} = \frac{1}{12} \left[5 \cos^2 I - 1 \right] G_i^1 + \frac{1}{12} \sin 2I G_i^2 - \frac{1}{24} \sin^2 I G_i^3 \quad (4.6.62)$$

y

$$k_M^{J_3} = \frac{J_3}{J_2} \frac{a}{a_M} k_M^{J_2} \quad (4.6.63)$$

Nutación del ecuador de figura.

Los términos de Oppolzer que provienen de $U_2^{J_3}$ son más pequeños que los términos de Poisson correspondientes. Estos términos no han sido considerados por otros autores, por lo que desarrollaremos en detalle las expresiones correspondientes al cálculo de estos términos de nutación del ecuador de figura. La función generatriz asociada a estos términos es $W_{30}^{(0,1)}$ puesto que su derivada no tiene $\sin J$ como factor. Esta función tiene la forma:

$$W_{30}^{(0,1)} = -k_M^{J_3} \frac{G}{12} \sin J (1 - 5 \cos^2 J) \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \frac{M_i^1(\epsilon)}{n_g - \epsilon N_i} \cos(g - \epsilon \chi_i) \quad (4.6.64)$$

Las expresiones finales para los términos Oppolzer, reemplazando $\cos J$ por 1 y $\sin J$ por J , son:

$$\Delta_{30}^{(0,1)} \left(\frac{J \sin g}{\sin I} \right) \approx \frac{1}{3} \frac{k_M^{J_3}}{\sin I} \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \frac{M_i^1(\epsilon)}{n_g - \epsilon N_i} \cos \chi_i \quad (4.6.65)$$

y,

$$\Delta_{30}^{(0,1)}(J \cos g) \approx \frac{1}{3} k_M^{J_3} \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \frac{\epsilon M_i^1(\epsilon)}{n_g - \epsilon N_i} \sin \chi_i \quad (4.6.66)$$

4.6.2 Términos de nutación que provienen de $U_2^{J_4}$.

La función generatriz asociada al potencial $U_2^{J_4}$ se obtiene a partir de la expresión:

$$W_2^{J_4} = \int U_{per}^{J_4} dt \quad (4.6.67)$$

Los términos de nutación del ecuador momento angular vienen dados por las expresiones:

$$\Delta_2^{J_4} h = k_M^{J_4} \sum_i \frac{F_i^{J_4}}{N_i} \cos \chi_i \quad (4.6.68)$$

$$\Delta_2^{J_4} I = k_M^{J_4} \sum_i \frac{I_i^{J_4}}{N_i} \sin \chi_i \quad (4.6.69)$$

siendo,

$$\begin{aligned} F_i^{J_4} &= \frac{5}{6} [3 \cos I - 7 \cos^3 I] H_i^0 + \frac{1}{12} [4 \csc I - 36 \sin I + 35 \sin^3 I] H_i^1 \\ &+ \frac{1}{18} \cos I [-4 + 7 \cos^2 I] H_i^2 + \frac{1}{72} \sin I [-1 + 4 \cos^2 I] H_i^3 + \frac{1}{144} \sin^2 I \cos I H_i^4 \end{aligned} \quad (4.6.70)$$

$$\begin{aligned} I_i^{J_4} &= -\frac{1}{12} \cos I [-3 + 7 \cos^2 I] H_i^1 - \frac{1}{36} \sin I [-1 + 7 \cos^2 I] H_i^2 \\ &- \frac{1}{24} \sin^2 I \cos I H_i^3 - \frac{1}{144} \sin^3 I H_i^4 \end{aligned} \quad (4.6.71)$$

y

$$k_M^{J_4} = \frac{J_4}{J_2} \left(\frac{a}{a_M} \right)^2 k_M^{J_2} \quad (4.6.72)$$

4.6.3 Términos de nutación que provienen de U_2^{CS} .

La función generatriz asociada a los términos del potencial U_2^{CS} tiene la expresión:

$$W_2^{CS} = \int U_{2per}^{CS} dt = \int U_{2per}^{31} dt + \int U_{2per}^{32} dt + \int U_{2per}^{33} dt = W_2^{31} + W_2^{32} + W_2^{33} \quad (4.6.73)$$

Nutación del plano perpendicular al eje momento angular.

Despreciando los términos que tienen $\sin J$ como factor, podemos aproximar las funciones generatrices de la siguiente forma [Folgueira *et al.* 1997a]:

$$\begin{aligned} W_2^{31} &\approx W_{31}^{(1,1)} = -k_M^{31} \frac{G}{3} \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \frac{X_i^1(\epsilon)}{n_g + n_l - \epsilon N_i} \sin(l + g - \tau_{31} - \epsilon \chi_i) \\ W_2^{32} &\approx W_{32}^{(2,2)} = k_M^{32} \frac{G}{3} \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \frac{X_i^2(\epsilon)}{2n_g + 2n_l - \epsilon N_i} \cos(2(l + g) - \tau_{32} - \epsilon \chi_i) \\ W_2^{33} &\approx W_{33}^{(3,3)} = -k_M^{33} \frac{G}{3} \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \frac{X_i^3(\epsilon)}{3n_g + 3n_l - \epsilon N_i} \sin(3(l + g) - \tau_{33} - \epsilon \chi_i) \end{aligned} \quad (4.6.74)$$

con,

$$W_{3m}^{(m,m')} = -\frac{\kappa^2 M M_M a^3}{a_M^4} \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 \sqrt{C_{3m}^2 + S_{3m}^2} \int P_{3m_{per}}^{(m,m')} dt \quad (4.6.75)$$

$$k_M^{3m} = \frac{\sqrt{C_{3m}^2 + S_{3m}^2}}{J_2} \frac{a}{a_M} k_M^{J_2}; \quad m = 1, 2, 3 \quad (4.6.76)$$

Los términos de nutación correspondientes al ecuador momento angular vienen dados por las expresiones:

$$\begin{aligned} \Delta_{31}^{(1,1)} h &= k_M^{31} \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \frac{Y_i^1(\epsilon)}{n_g + n_l - \epsilon N_i} \sin(l + g - \tau_{31} - \epsilon \chi_i) \\ \Delta_{32}^{(2,2)} h &= -k_M^{32} \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \frac{Y_i^2(\epsilon)}{2n_g + 2n_l - \epsilon N_i} \cos(2(l + g) - \tau_{32} - \epsilon \chi_i) \\ \Delta_{33}^{(3,3)} h &= k_M^{33} \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \frac{Y_i^3(\epsilon)}{3n_g + 3n_l - \epsilon N_i} \sin(3(l + g) - \tau_{33} - \epsilon \chi_i) \end{aligned} \quad (4.6.77)$$

y

$$\begin{aligned} \Delta_{31}^{(1,1)} I &= \frac{1}{3} \frac{k_M^{31}}{\sin I} \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \frac{Z_i^1(\epsilon)}{n_g + n_l - \epsilon N_i} \cos(l + g - \tau_{31} - \epsilon \chi_i) \\ \Delta_{32}^{(2,2)} I &= \frac{1}{3} \frac{k_M^{32}}{\sin I} \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \frac{Z_i^2(\epsilon)}{2n_g + 2n_l - \epsilon N_i} \sin(2(l + g) - \tau_{32} - \epsilon \chi_i) \\ \Delta_{33}^{(3,3)} I &= -\frac{1}{3} \frac{k_M^{33}}{\sin I} \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \frac{Z_i^3(\epsilon)}{3n_g + 3n_l - \epsilon N_i} \cos(3(l + g) - \tau_{33} - \epsilon \chi_i) \end{aligned} \quad (4.6.78)$$

siendo,

$$\begin{aligned}
Y_i^1(\varepsilon) &= \frac{1}{4}\varepsilon \cot I \left[-11 + 15 \cos^2 I \right] G_i^0 + \frac{1}{24} \left[11\varepsilon - 10 \cos I - 45\varepsilon \cos^2 I \right] G_i^1 \\
&- \frac{1}{24} \left[2 + 7\varepsilon \cos I - 4 \cos^2 I - 9\varepsilon \cos^3 I \right] \csc I G_i^2 \\
&- \frac{1}{48} \left[-\varepsilon + 3 \cos I \right] \left[1 + \varepsilon \cos I \right] G_i^3
\end{aligned} \tag{4.6.79}$$

$$\begin{aligned}
Y_i^2(\varepsilon) &= \frac{5}{2}\varepsilon \left[-1 + 3 \cos^2 I \right] G_i^0 + \frac{5}{12} \csc I \left[-2 - 7\varepsilon \cos I + 4 \cos^2 I + 9\varepsilon \cos^3 I \right] G_i^1 \\
&- \frac{1}{12}\varepsilon \left[1 + \varepsilon \cos I \right] \left[1 - 9\varepsilon \cos I \right] G_i^2 + \frac{1}{24} \left[1 + \varepsilon \cos I \right]^2 \left[-2 + 3\varepsilon \cos I \right] \csc I G_i^3
\end{aligned} \tag{4.6.80}$$

$$\begin{aligned}
Y_i^3(\varepsilon) &= -\frac{15}{4}\varepsilon \sin 2I G_i^0 - \frac{5}{4} \left[-\varepsilon + 3 \cos I \right] \left[1 + \varepsilon \cos I \right] G_i^1 \\
&+ \frac{1}{4} \left[1 + \varepsilon \cos I \right]^2 \left[-2 + 3\varepsilon \cos I \right] \csc I G_i^2 - \frac{1}{8}\varepsilon \left[1 + \varepsilon \cos I \right]^2 G_i^3
\end{aligned} \tag{4.6.81}$$

y

$$\begin{aligned}
Z_i^1(\varepsilon) &= \frac{3}{8}\varepsilon \sin 2I \left[-1 + 5 \cos^2 I \right] G_i^0 \\
&+ \frac{1}{8} \left[1 + \varepsilon \cos I \right] \left[-1 - 10\varepsilon \cos I + 15 \cos^2 I \right] \left[-\varepsilon + \cos I \right] G_i^1 \\
&- \frac{1}{8}\varepsilon \sin I \left[1 + \varepsilon \cos I \right] \left[1 - 3\varepsilon \cos I \right] \left[-2\varepsilon + \cos I \right] G_i^2 \\
&- \frac{1}{16} \sin^2 I \left[1 + \varepsilon \cos I \right] \left[-3\varepsilon + \cos I \right] G_i^3
\end{aligned} \tag{4.6.82}$$

$$\begin{aligned}
Z_i^2(\varepsilon) &= \frac{15}{4}\varepsilon \sin^2 2I G_i^0 + \frac{5}{4}\varepsilon \sin I \left[1 + \varepsilon \cos I \right] \left[-1 + 3\varepsilon \cos I \right] \left[-\varepsilon + 2 \cos I \right] G_i^1 \\
&- \frac{1}{2} \left[1 + \varepsilon \cos I \right]^2 \left[-2 + 3\varepsilon \cos I \right] \left[-\varepsilon + \cos I \right] G_i^2 \\
&+ \frac{1}{8}\varepsilon \sin I \left[1 + \varepsilon \cos I \right]^2 \left[-3\varepsilon + 2 \cos I \right] G_i^3
\end{aligned} \tag{4.6.83}$$

$$\begin{aligned}
Z_i^3(\varepsilon) &= -\frac{45}{2}\varepsilon \sin^3 I \cos I G_i^0 - \frac{15}{4} \sin^2 I \left[1 + \varepsilon \cos I \right] \left[-\varepsilon + 3 \cos I \right] G_i^1 \\
&+ \frac{3}{4}\varepsilon \sin I \left[1 + \varepsilon \cos I \right]^2 \left[-2\varepsilon + 3 \cos I \right] G_i^2 + \frac{3}{8} \left[1 + \varepsilon \cos I \right]^3 \left[-\varepsilon + \cos I \right] G_i^3
\end{aligned} \tag{4.6.84}$$

Nutación del plano perpendicular al eje de figura.

Las funciones generatrices asociadas a los términos Oppolzer que tenemos que tener en cuenta vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
W_{31}^{(1,0)} &= -\frac{1}{2}k_M^{31} G \sin J (-1 + 5\cos^2 J) \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \frac{X_i^0(\epsilon)}{n_l - \epsilon N_i} \sin(l - \tau_{31} - \epsilon\chi_i) \\
W_{31}^{(1,2)} &= -\frac{1}{24}k_M^{31} G \sum_{\rho=\pm 1} \rho \sin J (1 + \rho \cos J)(1 - 3\rho \cos J) \times \\
&\quad \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \frac{X_i^2(\epsilon)}{\rho n_l + 2n_g - \epsilon N_i} \sin(\rho l + 2g - \rho\tau_{31} - \epsilon\chi_i) \\
W_{32}^{(2,1)} &= \frac{5}{12}k_M^{32} G \sum_{\rho=\pm 1} \sin J (1 + \rho \cos J)(-1 + 3\rho \cos J) \times \\
&\quad \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \frac{X_i^1(\epsilon)}{2\rho n_l + n_g - \epsilon N_i} \cos(2\rho l + g - \rho\tau_{32} - \epsilon\chi_i) \\
W_{32}^{(2,3)} &= -\frac{1}{24}k_M^{32} G \sum_{\rho=\pm 1} \sin J (1 + \rho \cos J)^2 \times \\
&\quad \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \frac{X_i^3(\epsilon)}{2\rho n_l + 3n_g - \epsilon N_i} \cos(2\rho l + 3g - \rho\tau_{32} - \epsilon\chi_i) \\
W_{33}^{(3,3)} &= \frac{1}{24}k_M^{33} G \sum_{\rho=\pm 1} (1 + \rho \cos J)^3 \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \frac{X_i^3(\epsilon)}{3\rho n_l + 3n_g - \epsilon N_i} \sin(3\rho l + 3g - \rho\tau_{33} - \epsilon\chi_i)
\end{aligned} \tag{4.6.85}$$

Las expresiones finales para los términos Oppolzer tienen la forma, reemplazando $\cos J$ por 1 y $\sin J$ por J :

$$\begin{aligned}
\Delta_{31}^{(1,0)} \left(\frac{J \sin g}{\sin I} \right) &\approx -2 \frac{k_M^{31}}{\sin I} \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \frac{X_i^0(\epsilon)}{n_l - \epsilon N_i} \sin(l + g - \tau_{31} - \epsilon\chi_i) \\
\Delta_{31}^{(1,2)} \left(\frac{J \sin g}{\sin I} \right) &\approx \frac{1}{6} \frac{k_M^{31}}{\sin I} \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \frac{X_i^2(\epsilon)}{n_l + 2n_g - \epsilon N_i} \sin(l + g - \tau_{31} - \epsilon\chi_i) \\
\Delta_{32}^{(2,1)} \left(\frac{J \sin g}{\sin I} \right) &\approx \frac{5}{3} \frac{k_M^{32}}{\sin I} \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \frac{X_i^1(\epsilon)}{2n_l + n_g - \epsilon N_i} \cos(2l + 2g - \tau_{32} - \epsilon\chi_i) \\
\Delta_{32}^{(2,3)} \left(\frac{J \sin g}{\sin I} \right) &\approx -\frac{1}{6} \frac{k_M^{32}}{\sin I} \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \frac{X_i^3(\epsilon)}{2n_l + 3n_g - \epsilon N_i} \cos(2l + 2g - \tau_{32} - \epsilon\chi_i) \\
\Delta_{33}^{(3,2)} \left(\frac{J \sin g}{\sin I} \right) &\approx \frac{k_M^{33}}{\sin I} \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \frac{X_i^2(\epsilon)}{3n_l + 2n_g - \epsilon N_i} \sin(3l + 3g - \tau_{33} - \epsilon\chi_i)
\end{aligned} \tag{4.6.86}$$

y,

$$\begin{aligned}
\Delta_{31}^{(1,0)}(J \cos g) &\approx -2 k_M^{31} \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \frac{X_i^0(\epsilon)}{n_l - \epsilon N_i} \cos(l + g - \tau_{31} - \epsilon \chi_i) \\
\Delta_{31}^{(1,2)}(J \cos g) &\approx -\frac{1}{6} k_M^{31} \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \frac{X_i^2(\epsilon)}{n_l + 2n_g - \epsilon N_i} \cos(l + g - \tau_{31} - \epsilon \chi_i) \\
\Delta_{32}^{(2,1)}(J \cos g) &\approx -\frac{5}{3} k_M^{32} \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \frac{X_i^1(\epsilon)}{2n_l + n_g - \epsilon N_i} \sin(2l + 2g - \tau_{32} - \epsilon \chi_i) \\
\Delta_{32}^{(2,3)}(J \cos g) &\approx -\frac{1}{6} k_M^{32} \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \frac{X_i^3(\epsilon)}{2n_l + 3n_g - \epsilon N_i} \sin(2l + 2g - \tau_{32} - \epsilon \chi_i) \\
\Delta_{33}^{(3,2)}(J \cos g) &\approx k_M^{33} \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \frac{X_i^2(\epsilon)}{3n_l + 2n_g - \epsilon N_i} \cos(3l + 3g - \tau_{33} - \epsilon \chi_i) \quad (4.6.87)
\end{aligned}$$

4.6.4 Términos de nutación que provienen de U_2^{41} .

Las funciones generatrices asociadas al potencial U_2^{41} tienen la forma:

$$W_2^{41} = \int U_{4per}^{41} dt \approx W_{41}^{(1,0)} + W_{41}^{(1,1)} + W_{41}^{(1,2)} \quad (4.6.88)$$

Nutación del plano perpendicular al eje de figura.

[Folgueira *et al.* 1997b] han comprobado numéricamente que los términos correspondientes al ecuador momento angular son despreciables, por lo tanto sólo escribiremos aquí las expresiones de las funciones generatrices asociadas a los términos Oppolzer:

$$\begin{aligned}
W_{41}^{(1,0)} &= \frac{5}{6} k_M^{41} G \sin J \cos J (-3 + 7 \cos^2 J) \times \\
&\quad \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \frac{R_i^0}{n_l - \epsilon N_i} \cos(l - \tau_{41} - \epsilon \chi_i) \\
W_{41}^{(1,2)} &= \frac{1}{72} k_M^{41} G \sum_{\rho=\pm 1} \sin J (1 + \rho \cos J) (1 + 7\rho \cos J - 14 \cos^2 J) \times \\
&\quad \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \frac{R_i^2(\epsilon)}{2n_g + \rho n_l - \epsilon N_i} \cos(\rho l + 2g - \rho \tau_{41} - \epsilon \chi_i) \quad (4.6.89)
\end{aligned}$$

siendo.

$$k_M^{41} = \frac{\sqrt{C_{41}^2 + S_{41}^2}}{J_2} \left(\frac{a}{a_M} \right)^2 k_M^{J_2} \quad (4.6.90)$$

el factor de escala obtenido a partir de $k_M^{J_2}$ y de los armónicos no-zonales C_{41} y S_{41} .

Las expresiones finales de los términos Oppolzer correspondientes a estos armónicos tienen la forma final:

$$\begin{aligned}\Delta_{41}^{(1,0)} \left(\frac{J \sin g}{\sin I} \right) &\approx \frac{10}{3} \frac{k_M^{41}}{\sin I} \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \frac{R_i^0}{n_l - \epsilon N_i} \cos(l + g - \tau_{41} - \epsilon \chi_i) \\ \Delta_{41}^{(1,2)} \left(\frac{J \sin g}{\sin I} \right) &\approx -\frac{1}{6} \frac{k_M^{41}}{\sin I} \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \frac{R_i^2(\epsilon)}{n_l + 2n_g - \epsilon N_i} \cos(l + g - \tau_{41} - \epsilon \chi_i) \quad (4.6.91)\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}\Delta_{41}^{(1,0)} (J \cos g) &\approx -\frac{10}{3} k_M^{41} \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \frac{R_i^0}{n_l - \epsilon N_i} \sin(l + g - \tau_{41} - \epsilon \chi_i) \\ \Delta_{41}^{(1,2)} (J \cos g) &\approx -\frac{1}{6} k_M^{41} \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_i \frac{R_i^2(\epsilon)}{n_l + 2n_g - \epsilon N_i} \sin(l + g - \tau_{41} - \epsilon \chi_i) \quad (4.6.92)\end{aligned}$$

4.7 Conclusiones.

A lo largo de este Capítulo se han desarrollado teóricamente las expresiones de la nutación lunar y solar, en longitud y en oblicuidad, debidas a la influencia de todos los armónicos zonales y no-zonales hasta el grado 4 y el orden 1.

Las expresiones de las perturbaciones de segundo orden debidas al Sol son similares a las de la Luna, intercambiando el subíndice M por el subíndice S .

También se han estudiado los efectos del cambio secular de la oblicuidad sobre los términos de nutación, obteniéndose las expresiones teóricas correspondientes.

Los valores numéricos de los factores de escala se encuentran recopilados en el Apéndice 1.

Capítulo 5

Resultados numéricos de la nutación lunisolar en longitud y en oblicuidad

5.1 Introducción.

En vista de la abundante producción de trabajos sobre el estudio de la nutación de la Tierra rígida recientemente publicados, es necesaria una comparación de las amplitudes de los términos obtenidos con las diferentes teorías o procedimientos.

En este Capítulo, se obtendrán primeramente los términos de nutación que provienen de los armónicos zonales J_3 y J_4 y las nutaciones diurnas y subdiurnas relacionadas con los armónicos no zonales de grado 3 y 4. Posteriormente, evaluaremos los coeficientes de la nutación debidos a la introducción en los cálculos de la variación secular de la oblicuidad. Finalmente, se compararán los principales términos con los recientes resultados de [Souchay & Kinoshita 1997], [Bretagnon *et al.* 1997], [Folgueira *et al.* 1997a] y [Folgueira *et al.* 1997b].

5.2 Términos de la nutación relacionados con el armónico zonal J_3 .

Evaluaremos en esta sección los términos de Poisson y los términos Oppolzer relacionados con el armónico zonal J_3 . Estos últimos términos, que no han sido considerados en los últimos trabajos en los que se utiliza la formulación Hamiltoniana, son más pequeños que los correspondientes términos de Poisson y deberán añadirse en las tablas finales de la nutación de la Tierra rígida.

5.2.1 Nutación del plano perpendicular al eje momento angular.

Las tablas 5.1 y 5.2 muestran los términos de Poisson relacionados con el armónico zonal J_3 obtenidos a partir de las expresiones (4.6.59) hasta (4.6.63).

Tabla 5.1: Coeficientes de $\Delta_{30}^{(0,0)}h$.

l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE (μs)
1	0	-1	0	0	27.21222	-7.380
2	-1	-1	0	0	13.69116	-0.610
0	1	-1	0	0	2190.35011	-32.262
2	1	-1	-2	0	14.66643	-0.123
0	1	1	-2	0	-188.20135	-1.491
1	0	1	-2	0	32.28078	-0.138
1	0	0	0	0	27.32158	15.910
2	-1	0	0	0	13.71879	1.313
0	1	0	0	0	3231.49565	103.810
2	1	0	-2	0	14.69814	0.333
0	-1	0	2	0	193.55971	2.706
3	0	0	-2	0	9.58520	0.118
3	-2	0	0	0	9.15882	0.090
-1	0	2	0	0	-27.10373	-0.178
3	0	-2	0	0	9.08286	0.058
-1	0	0	2	0	-32.12822	-0.159
0	-1	2	0	0	-1656.61157	-0.572
1	0	1	0	0	27.43183	-2.959
3	0	-1	0	0	9.09501	0.957
4	-1	-1	0	0	6.83798	0.198
2	-1	1	0	0	13.74653	-0.241
2	1	-1	0	0	13.57612	-0.085
0	1	1	0	0	6159.13567	-35.967
2	1	1	-2	0	14.72998	-0.074
1	0	-1	2	0	23.68321	-0.066
0	-1	1	2	0	199.23213	-0.336
0	3	-1	0	0	929.83772	-0.065
3	0	0	0	0	9.10719	2.557
4	-1	0	0	0	6.84486	0.526
2	1	0	0	0	13.60328	-0.223
4	1	0	-2	0	7.08025	0.104
5	0	0	-2	0	5.63286	0.058
1	2	0	0	0	26.86727	-0.208
0	3	0	0	0	1077.16522	-0.927

Tabla 5.2: Coeficientes de $\Delta_{30}^{(0,0)}I$.

l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE (μs)
1	0	0	0	0	27.32158	13.608
2	-1	0	0	0	13.71879	1.123
0	1	0	0	0	3231.49565	88.788
2	1	0	-2	0	14.69814	0.285
0	-1	0	2	0	193.55971	2.315
3	0	0	-2	0	9.58520	0.101
3	-2	0	0	0	9.15882	0.077
-1	0	2	0	0	-27.10373	-0.152
3	0	-2	0	0	9.08286	0.050
-1	0	0	2	0	-32.12822	-0.136
0	-1	2	0	0	-1656.61157	-0.489
1	0	1	0	0	27.43183	-1.416
3	0	-1	0	0	9.09501	0.458

Tabla 5.2: Continuación.

l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE (μs)
4	-1	-1	0	0	6.83798	0.095
2	-1	1	0	0	13.74653	-0.115
0	1	1	0	0	6159.13567	-17.211
0	-1	1	2	0	199.23213	-0.161
3	0	0	0	0	9.10719	1.109
4	-1	0	0	0	6.84486	0.228
2	1	0	0	0	13.60328	-0.097
1	2	0	0	0	26.86727	-0.090
0	3	0	0	0	1077.16522	-0.402

5.2.2 Nutación del ecuador de figura.

Las tablas 5.3 y 5.4 muestran los términos Oppolzer correspondientes al ecuador de figura, obtenidos a partir de las expresiones (4.6.65) y (4.6.66) del Capítulo precedente, que están por encima del límite de precisión considerado actualmente en todos los desarrollos teóricos sobre el estudio de la nutación de la Tierra rígida ($0.1 \mu s$).

Tabla 5.3: Coeficientes de los términos Oppolzer del eje de figura $\Delta_{30}^{(0,1)} \left(\frac{J \sin g}{\sin I} \right)_f$.

l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE (μs)
1	0	0	0	0	27.32158	1.267
2	-1	0	0	0	13.71879	0.213
0	1	0	0	0	3231.49565	0.068
2	1	0	-2	0	14.69814	0.050
1	0	1	0	0	27.43183	-0.134
3	0	-1	0	0	9.09501	0.139
3	0	0	0	0	9.10719	0.338
4	-1	0	0	0	6.84486	0.096

Tabla 5.4: Coeficientes de los términos Oppolzer del eje de figura $\Delta_{30}^{(0,1)} (J \cos g)_f$.

l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE (μs)
1	0	0	0	0	27.32158	-0.504
2	-1	0	0	0	13.71879	-0.084
1	0	1	0	0	27.43183	0.053
3	0	-1	0	0	9.09501	-0.054
3	0	0	0	0	9.10719	-0.135

5.3 Coeficientes de la nutación debidos a la influencia de los armónicos no zonales de grado 3.

Los términos de la nutación relacionados con los armónicos C_{3m} y S_{3m} han sido calculados recientemente por [Bretagnon *et al.* 1997] y [Folgueira *et al.* 1997a]. Bretagnon *et al.* han calculado esta contribución utilizando las ecuaciones clásicas de Euler y las teorías semianalíticas del movimiento de la Luna y del Sol del *Bureau des Longitudes*. Folgueira *et al.* han obtenido estos términos con la ayuda de las ecuaciones canónicas de Hamilton y siguiendo el procedimiento desarrollado por [Kinoshita 1977] y [Kinoshita & Souchay 1990a].

Estos términos se pueden clasificar en tres categorías atendiendo a su período: los términos diarios, originados a partir de C_{31} y S_{31} , los términos semidiurnos que provienen de C_{32} y S_{32} y finalmente los términos terciodiurnos, originados a partir de C_{33} y S_{33} . En las siguientes secciones recalculamos estos términos utilizando los desarrollos de las funciones de Legendre de grado 3 obtenidas en el Capítulo 3.

5.3.1 Términos diarios.

Nutación del plano perpendicular al eje momento angular.

Las tablas 5.5 y 5.6 muestran los términos correspondientes a la nutación del plano perpendicular al eje momento angular debidos a los armónicos C_{31} y S_{31} y obtenidos a partir de las expresiones (4.6.77) y (4.6.78).

Tabla 5.5: Coeficientes de $\Delta_{31}^{(1,1)}h$.

$l+g$	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE - sen - (μs)	COEFICIENTE - cos - (μs)
1	-1	0	1	0	0	1.03521	0.142	0
1	1	0	-1	0	0	0.96201	-0.132	0
1	-1	0	0	0	0	1.03505	2.504	0.308
1	-2	1	0	0	0	1.07545	0.428	0.053
1	0	-1	0	0	0	0.99758	0.133	0
1	-2	-1	0	2	0	1.06986	0.101	0
1	0	1	0	-2	0	1.00243	0.058	0
1	-3	0	0	2	0	1.11308	0.058	0
1	1	0	0	0	0	0.96215	-1.143	-0.141
1	2	-1	0	0	0	0.92969	-0.182	0
1	0	1	0	0	0	0.99696	-0.066	0
1	-1	0	-1	0	0	1.03489	0.151	0
1	-3	0	1	0	0	1.12009	-0.159	0
1	1	0	1	0	0	0.96229	0.062	0
1	3	0	-1	0	0	0.89872	-0.057	0
1	-3	0	0	0	0	1.11990	-1.253	-0.154
1	-4	1	0	0	0	1.16735	-0.357	0
1	-2	-1	0	0	0	1.07616	0.070	0
1	-4	-1	0	2	0	1.16077	-0.067	0
1	-5	0	0	2	0	1.21182	-0.050	0
1	3	0	0	0	0	0.89884	-0.092	0

Tabla 5.6: Coeficientes de $\Delta_{31}^{(1,1)}I$.

$l+g$	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE - sen - (μs)	COEFICIENTE - cos - (μs)
1	-1	0	1	0	0	1.03521	0	0.133
1	1	0	-1	0	0	0.96201	0	-0.123
1	-1	0	0	0	0	1.03505	0	0.080
1	1	0	0	0	0	0.96215	0.078	-0.637
1	2	-1	0	0	0	0.92969	0	-0.101
1	-1	0	-1	0	0	1.03489	0	-0.137
1	-3	0	1	0	0	1.12009	0	0.145
1	-3	0	0	0	0	1.11990	-0.087	0.707
1	-4	1	0	0	0	1.16735	0	0.201
1	3	0	0	0	0	0.89884	0	-0.046

Nutación del ecuador de figura.

Los términos Oppolzer del eje de figura debidos a la influencia de los armónicos no zonales de grado 3 y orden 1 se encuentran en las tablas 5.7 a 5.10. Como se puede observar las amplitudes de las componentes de la nutación del plano perpendicular al eje momento angular son más pequeñas que las correspondientes a los términos Oppolzer.

Tabla 5.7: Coeficientes de los términos Oppolzer del eje de figura $\Delta_{31}^{(1,0)} \left(\frac{J \text{ sen } g}{\text{sen } I} \right)_f$.

$l+g$	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE - sen - (μs)	COEFICIENTE - cos - (μs)
1	-1	0	1	0	0	1.03521	5.091	0.626
1	-2	1	1	0	0	1.07562	0.439	0.054
1	0	-1	1	0	0	0.99772	2.960	0.364
1	-2	-1	1	2	0	1.07003	0.088	0
1	0	-1	-1	2	0	0.99201	2.932	0.360
1	-1	0	-1	2	0	1.02906	0.094	0
1	1	0	-1	0	0	0.96201	6.089	0.748
1	2	-1	-1	0	0	0.92956	0.480	0.059
1	0	1	-1	0	0	0.99682	-3.917	-0.481
1	2	1	-1	-2	0	0.93378	0.097	0
1	0	1	1	-2	0	1.00258	0.693	0.085
1	1	0	1	-2	0	0.96738	0.116	0
1	-1	0	0	0	0	1.03505	32.399	3.982
1	-2	1	0	0	0	1.07545	2.789	0.343
1	0	-1	0	0	0	0.99758	19.845	2.439
1	-2	-1	0	2	0	1.06986	0.706	0.086
1	0	1	0	-2	0	1.00243	3.672	0.451
1	-3	0	0	2	0	1.11308	0.255	0
1	-3	2	0	0	0	1.11913	0.195	0
1	1	0	-2	0	0	0.96188	-0.433	-0.053

Tabla 5.7: Continuación.

$l + g$	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE - sen - (μs)	COEFICIENTE - cos - (μs)
1	-3	0	2	0	0	1.12027	0.125	0
1	1	0	0	-2	0	0.96725	-0.394	-0.048
1	-1	2	0	-2	0	1.04028	0.087	0
1	-1	0	0	-1	1	1.03799	-0.057	0
1	-1	0	0	1	-1	1.03213	0.066	0
1	-1	-2	0	2	0	1.02987	0.047	0
1	1	-2	0	0	0	0.96272	-0.046	0
1	0	1	-2	0	0	0.99667	0.286	0
1	0	-1	-2	2	0	0.99187	-0.222	0
1	0	-1	0	1	-1	0.99486	0.158	0
1	1	0	0	0	0	0.96215	38.783	4.767
1	2	-1	0	0	0	0.92969	3.052	0.375
1	0	1	0	0	0	0.99696	-23.976	-2.947
1	2	1	0	-2	0	0.93390	0.777	0.096
1	0	-1	0	2	0	0.99216	16.471	2.024
1	3	0	0	-2	0	0.90329	0.271	0
1	3	-2	0	0	0	0.89934	0.206	0
1	-1	0	2	0	0	1.03537	-0.362	0
1	3	0	-2	0	0	0.89861	0.133	0
1	-1	0	0	2	0	1.02922	-0.319	0
1	1	-2	0	2	0	0.95767	0.102	0
1	1	0	0	1	-1	0.95962	-0.067	0
1	1	0	0	-1	1	0.96469	0.079	0
1	1	2	0	-2	0	0.96667	0.056	0
1	0	-1	2	0	0	0.99787	-0.198	0
1	0	1	2	-2	0	1.00273	-0.056	0
1	0	0	0	1	0	0.99455	0.437	0.054
1	0	1	0	1	-1	0.99423	0.571	0.070
1	0	-1	0	1	1	0.99486	-0.092	0
1	-1	0	-1	0	0	1.03489	-1.685	-0.207
1	-3	0	1	0	0	1.12009	0.577	0.071
1	-4	1	1	0	0	1.16755	0.120	0
1	-2	1	-1	0	0	1.07528	-0.143	0
1	-2	-1	1	0	0	1.07633	-0.051	0
1	0	-1	-1	0	0	0.99743	-1.052	0
1	0	1	-1	-2	0	1.00229	-0.126	0
1	1	0	1	0	0	0.96229	-2.019	-0.248
1	3	0	-1	0	0	0.89872	0.612	0.075
1	4	-1	-1	0	0	0.87034	0.126	0
1	2	-1	1	0	0	0.92981	-0.157	0
1	2	1	-1	0	0	0.92903	-0.055	0
1	0	1	1	0	0	0.99711	1.161	0.143
1	2	1	1	-2	0	0.93403	-0.049	0
1	0	-1	1	2	0	0.99230	-0.602	-0.074
1	-3	0	0	0	0	1.11990	0.931	0.114
1	-4	1	0	0	0	1.16735	0.193	0
1	-2	-1	0	0	0	1.07616	-0.080	0
1	-1	-2	0	0	0	1.03571	-0.071	0
1	0	-3	0	0	0	0.99819	-0.076	0
1	3	0	0	0	0	0.89884	0.989	0.121
1	4	-1	0	0	0	0.87045	0.201	0
1	2	1	0	0	0	0.92915	-0.087	0
1	1	2	0	0	0	0.96158	-0.085	0
1	0	3	0	0	0	0.99635	0.137	0

Tabla 5.8: Coeficientes de los términos Oppolzer del eje de figura $\Delta_{31}^{(1,2)} \left(\frac{J \sin g}{\sin I} \right)_f$.

$l+g$	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE - sen - (μs)	COEFICIENTE - cos - (μs)
1	-1	0	0	0	0	1.03505	-0.572	-0.070
1	-2	1	0	0	0	1.07545	-0.095	0
1	1	0	0	0	0	0.96215	-0.051	0
1	-1	0	-1	0	0	1.03489	-0.108	0
1	-3	0	1	0	0	1.12009	0.109	0
1	-3	0	0	0	0	1.11990	0.644	0.079
1	-4	1	0	0	0	1.16735	0.180	0

Tabla 5.9: Coeficientes de los términos Oppolzer del eje de figura $\Delta_{31}^{(1,0)}(J \cos g)_f$.

$l+g$	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE - sen - (μs)	COEFICIENTE - cos - (μs)
1	-1	0	1	0	0	1.03521	0.249	-2.025
1	-2	1	1	0	0	1.07562	0	-0.175
1	0	-1	1	0	0	0.99772	0.145	-1.177
1	0	-1	-1	2	0	0.99201	0.143	-1.166
1	1	0	-1	0	0	0.96201	0.298	-2.423
1	2	-1	-1	0	0	0.92956	0	-0.190
1	0	1	-1	0	0	0.99682	-0.192	1.558
1	0	1	1	-2	0	1.00258	0	-0.276
1	1	0	1	-2	0	0.96738	0	-0.047
1	-1	0	0	0	0	1.03505	1.584	-12.888
1	-2	1	0	0	0	1.07545	0.136	-1.110
1	0	-1	0	0	0	0.99758	0.970	-7.894
1	-2	-1	0	2	0	1.06986	0	-0.281
1	0	1	0	-2	0	1.00243	0.180	-1.461
1	-3	0	0	2	0	1.11308	0	-0.101
1	-3	2	0	0	0	1.11913	0	-0.077
1	1	0	-2	0	0	0.96188	0	0.172
1	-3	0	2	0	0	1.12027	0	-0.050
1	1	0	0	-2	0	0.96725	0	0.157
1	0	1	-2	0	0	0.99667	0	-0.114
1	0	-1	-2	2	0	0.99187	0	-0.088
1	1	0	0	0	0	0.96215	1.896	-15.427
1	2	-1	0	0	0	0.92969	0.149	-1.214
1	0	1	0	0	0	0.99696	-1.172	9.537
1	2	1	0	-2	0	0.93390	0	-0.309
1	0	-1	0	2	0	0.99216	0.805	-6.552
1	3	0	0	-2	0	0.90329	0	-0.108
1	3	-2	0	0	0	0.89934	0	-0.082
1	-1	0	2	0	0	1.03537	0	0.144
1	3	0	-2	0	0	0.89861	0	-0.053
1	-1	0	0	2	0	1.02922	0	0.127
1	0	-1	2	0	0	0.99787	0	0.078
1	0	0	0	1	0	0.99455	0	-0.174
1	0	1	0	1	-1	0.99425	0	-0.227
1	-1	0	-1	0	0	1.03489	0.082	0.670

Tabla 5.9: Continuación.

$l+g$	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE - sen - (μas)	COEFICIENTE - cos - (μas)
1	-3	0	1	0	0	1.12009	0	-0.229
1	-4	1	1	0	0	1.16755	0	-0.048
1	-2	1	-1	0	0	1.07528	0	0.057
1	0	-1	-1	0	0	0.99743	-0.051	0.419
1	0	1	-1	-2	0	1.00229	0	0.051
1	1	0	1	0	0	0.96229	0.099	0.803
1	3	0	-1	0	0	0.89872	0	-0.243
1	4	-1	-1	0	0	0.87034	0	-0.051
1	2	-1	1	0	0	0.92981	0	0.062
1	0	1	1	0	0	0.99711	0.057	-0.463
1	0	-1	1	2	0	0.99230	0	0.239
1	-3	0	0	0	0	1.11990	0.046	-0.370
1	-4	1	0	0	0	1.16735	0	-0.076
1	3	0	0	0	0	0.89884	0.048	-0.393
1	4	-1	0	0	0	0.87045	0	-0.080

Tabla 5.10: Coeficientes de los términos Oppolzer del eje de figura $\Delta_{31}^{(1,2)}(J \cos g)_f$.

$l+g$	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE - sen - (μas)	COEFICIENTE - cos - (μas)
1	-1	0	0	0	0	1.03505	0	-0.227
1	-3	0	0	0	0	1.11990	0	0.256
1	-4	1	0	0	0	1.16735	0	0.071

Nutación del plano perpendicular al eje de rotación.

Las componentes de la nutación del plano perpendicular al eje de rotación relacionadas con los armónicos C_{31} y S_{31} se obtienen multiplicando los términos Oppolzer del eje de figura, (4.6.86) y (4.6.87), por el factor $1 - \frac{C}{2A} - \frac{C}{2B} = 0.0032845$.

Tabla 5.11: Coeficientes de los términos Oppolzer del eje de rotación $\Delta_{31}^{(1,0)} \left(\frac{J \sin g}{\sin I} \right)_r$

$l+g$	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE - sen - (μas)	COEFICIENTE - cos - (μas)
1	-1	0	0	0	0	1.03505	0.106	0
1	0	-1	0	0	0	0.99758	0.065	0
1	1	0	0	0	0	0.96215	0.127	0
1	0	1	0	0	0	0.99696	-0.079	0
1	0	-1	0	2	0	0.99216	0.054	0

Tabla 5.12: Coeficientes de los términos Oppolzer del eje de rotación $\Delta_{31}^{(1,0)}(J \cos g)_r$.

$l+g$	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE - sen - (μs)	COEFICIENTE - cos - (μs)
1	1	0	0	0	0	0.96215	0	0.051

5.3.2 Términos semidiurnos.

Nutación del plano perpendicular al eje momento angular.

Las tablas 5.13 y 5.14 muestran los términos correspondientes a la nutación del plano perpendicular al eje momento angular debidos a los armónicos C_{32} y S_{32} y obtenidos a partir de las expresiones (4.6.77) y (4.6.78).

Tabla 5.13: Coeficientes de $\Delta_{32}^{(2,2)}h$.

$l+g$	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE - sen - (μs)	COEFICIENTE - cos - (μs)
2	-1	0	0	0	0	0.50790	-0.157	-0.229
2	1	0	0	0	0	0.48970	-0.067	-0.097
2	-1	0	-1	0	0	0.50787	0	0.061
2	-3	0	1	0	0	0.52756	0	-0.062
2	-3	0	0	0	0	0.52752	0.236	0.344
2	-4	1	0	0	0	0.53781	0.066	0.096

Tabla 5.14: Coeficientes de $\Delta_{32}^{(2,2)}I$.

$l+g$	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE - sen - (μs)	COEFICIENTE - cos - (μs)
2	-1	0	0	0	0	0.50790	-0.161	0.110
2	1	0	0	0	0	0.48970	-0.049	0
2	-3	0	0	0	0	0.52752	-0.253	0.173
2	-4	1	0	0	0	0.53781	-0.071	0.049

Nutación del ecuador de figura.

Los términos Oppolzer del eje de figura debidos a la influencia de los armónicos C_{32} y S_{32} se encuentran en las tablas 5.15 a 5.18.

Tabla 5.15: Coeficientes de los términos Oppolzer del eje de figura $\Delta_{32}^{(2,1)} \left(\frac{J \sin g}{\sin I} \right)_f$.

$l+g$	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE - sen - (μas)	COEFICIENTE - cos - (μas)
2	-1	0	1	0	0	0.50794	-0.059	-0.086
2	1	0	-1	0	0	0.48966	0.055	0.080
2	-1	0	0	0	0	0.50790	0.398	0.580
2	-2	1	0	0	0	0.51744	0.068	0.099
2	1	0	0	0	0	0.48970	0.135	0.197
2	-1	0	-1	0	0	0.50787	-0.051	-0.075
2	-3	0	1	0	0	0.52756	0.054	0.079
2	-3	0	0	0	0	0.52752	0.138	0.201
2	-4	1	0	0	0	0.53781	0	0.058

Tabla 5.16: Coeficientes de los términos Oppolzer del eje de figura $\Delta_{32}^{(2,3)} \left(\frac{J \sin g}{\sin I} \right)_f$.

$l+g$	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE - sen - (μas)	COEFICIENTE - cos - (μas)
2	-3	0	0	0	0	0.52752	-0.196	-0.286
2	-4	1	0	0	0	0.53781	-0.054	-0.079

Tabla 5.17: Coeficientes de los términos Oppolzer del eje de figura $\Delta_{32}^{(2,1)} (J \cos g)_f$.

$l+g$	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE - sen - (μas)	COEFICIENTE - cos - (μas)
2	-1	0	0	0	0	0.50790	0.231	-0.158
2	1	0	0	0	0	0.48970	0.078	-0.054
2	-3	0	0	0	0	0.52752	0.080	-0.055

Tabla 5.18: Coeficientes de los términos Oppolzer del eje de figura $\Delta_{32}^{(2,3)}(J \cos g)_f$.

$l+g$	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE - sen - (μas)	COEFICIENTE - cos - (μas)
2	-3	0	0	0	0	0.52752	0.114	-0.078

5.3.3 Términos terciodiurnos.

Nutación del plano perpendicular al eje momento angular.

Las tablas 5.19 y 5.20 muestran los términos correspondientes a la nutación del plano perpendicular al eje momento angular debidos a los armónicos C_{33} y S_{33} , obtenidos a partir de las expresiones (4.6.77) y (4.6.78).

Tabla 5.19: Coeficientes de $\Delta_{33}^{(3,3)}h$.

$l+g$	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE - sen - (μas)	COEFICIENTE - cos - (μas)
3	-1	0	0	0	0	0.33652	0.104	0.205
3	-3	0	0	0	0	0.34502	-0.116	-0.228

Tabla 5.20: Coeficientes de $\Delta_{33}^{(3,3)}I$.

$l+g$	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE - sen - (μas)	COEFICIENTE - cos - (μas)
3	-1	0	0	0	0	0.33652	-0.097	0.049
3	-3	0	0	0	0	0.34502	0.108	-0.055

Nutación del ecuador de figura.

Los términos Oppolzer del eje de figura debidos a la influencia de los armónicos C_{33} y S_{33} se encuentran en las tablas siguientes.

Tabla 5.21: Coeficientes de los términos Oppolzer del eje de figura $\Delta_{33}^{(3,2)} \left(\frac{J \sin g}{\sin I} \right)_f$.

$l+g$	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE - sen - (μs)	COEFICIENTE - cos - (μs)
3	-1	0	0	0	0	0.33652	-0.158	-0.310
3	-2	1	0	0	0	0.34068	0	-0.052
3	-1	0	-1	0	0	0.33650	0	-0.059
3	-3	0	1	0	0	0.34503	0	0.059
3	-3	0	0	0	0	0.34502	0.178	0.349
3	-4	1	0	0	0	0.34939	0.049	0.097

Tabla 5.22: Coeficientes de los términos Oppolzer del eje de figura $\Delta_{33}^{(3,2)} (J \cos g)_f$.

$l+g$	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE - sen - (μs)	COEFICIENTE - cos - (μs)
3	-1	0	0	0	0	0.33652	-0.123	0.062
3	-3	0	0	0	0	0.34502	0.139	-0.071

5.4 Términos de la nutación relacionados con el armónico zonal J_4 .

5.4.1 Nutación del plano perpendicular al eje momento angular.

Las tablas 5.23 y 5.24 muestran las componentes de la nutación del plano normal al eje momento angular relacionadas con el armónico zonal de grado 4, J_4 . Estos términos se obtienen a partir de las expresiones (4.6.68) a (4.6.72).

Tabla 5.23: Coeficientes de $\Delta_{40}^{(0,0)} h$.

l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE (μs)
1	-1	0	0	0	27.55455	0.082
0	0	1	0	0	-6798.38366	-5.225
2	0	0	0	0	13.66079	0.128
0	0	2	0	0	-3399.19183	-0.532
0	2	0	0	0	1615.74782	-0.150
0	2	1	0	0	2119.47626	-0.049

Tabla 5.24: Coeficientes de $\Delta_{40}^{(0,0)}I$.

l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE (μs)
0	0	1	0	0	-6798.38366	6.727
2	0	0	0	0	13.66079	0.072
0	0	2	0	0	-3399.19183	-0.298
0	2	0	0	0	1615.74782	-0.084

5.5 Términos de la nutación relacionados con los armónicos no zonales C_{41} y S_{41} .

[Bretagnon *et al.* 1997] y [Folgueira *et al.* 1997b] han estudiado la influencia de todos los armónicos no zonales de grado 4: C_{4m} y S_{4m} ($m=1,2,3,4$). Sólomente para $m=1$ existen componentes mayores a $0.1 \mu s$, por lo que para $m > 2$ los términos son despreciables. Las tablas 5.25 y 5.26 muestran los términos de la nutación correspondientes a los armónicos C_{41} y S_{41} obtenidos a partir de las expresiones (4.6.91) y (4.6.92).

Tabla 5.25: Coeficientes de los términos Oppolzer del eje de figura $\Delta_{41}^{(1,0)} \left(\frac{J \sin g}{\sin I} \right)_f$.

$l+g$	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE - sen - (μs)	COEFICIENTE - cos - (μs)
1	0	0	0	0	0	0.99727	-1.323	1.100
1	0	0	-1	0	0	0.99712	0.527	-0.438
1	0	0	1	0	0	0.99742	0.482	-0.400
1	-2	0	0	0	0	1.07581	-0.057	0.047
1	2	0	0	0	0	0.92942	0.062	-0.052

Tabla 5.26: Coeficientes de los términos Oppolzer del eje de figura $\Delta_{41}^{(1,0)}(J \cos g)_f$.

$l+g$	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE - sen - (μs)	COEFICIENTE - cos - (μs)
1	0	0	0	0	0	0.99727	-0.438	-0.527
1	0	0	-1	0	0	0.99712	0.174	0.209
1	0	0	1	0	0	0.99742	0.160	0.192

5.6 Contribución solar.

Las tablas 5.27, 5.28 y 5.29 muestran los coeficientes de la nutación solar correspondientes al armónico zonal J_3 y a los armónicos zonales C_{31} y S_{31} . La influencia de los otros armónicos es despreciable [Folgueira *et al.* 1997a].

Tabla 5.27: Coeficientes de $\Delta_{30}^{(0,0)}h$ y $\Delta_{30}^{(0,0)}I$. Parte solar.

l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	LONGITUD (μas)	OBLICUIDAD (μas)
0	0	0	1	0	365.24219	-0.259	0.221

Tabla 5.28: Coeficientes de los términos Oppolzer del eje de figura $\Delta_{31}^{(1,0)}\left(\frac{J \sin g}{\sin I}\right)_f$. Parte solar.

$l+g$	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE (μas)
1	0	0	0	-1	0	1.00000	-0.263
1	0	0	0	1	0	0.99455	2.908

Tabla 5.29: Coeficientes de los términos Oppolzer del eje de figura $\Delta_{31}^{(1,0)}(J \cos g)_f$. Parte solar.

$l+g$	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE (μas)
1	0	0	0	-1	0	1.00000	0.105
1	0	0	0	1	0	0.99455	-1.157

5.7 Coeficientes numéricos de la nutación correspondientes a los términos $\Delta_S^{\Delta I}(h, I)$.

5.7.1 Nutación del plano perpendicular al eje momento angular.

Las tablas 5.30 y 5.31 muestran los coeficientes numéricos de la nutación del plano perpendicular al eje momento angular que provienen de introducir la variación secular de la oblicuidad en los cálculos.

Tabla 5.30: Coeficientes de la nutación en longitud del eje momento angular debidos a la introducción de la variación secular de I en los cálculos.

l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE - cos - (μas)	COEFICIENTE - T sen - (μas)
1	-1	0	0	0	27.55455		9.463
1	1	0	-2	0	31.81194		1.864
2	0	0	-2	0	14.76529		1.182
2	-2	0	0	0	13.77727		1.036
2	0	-2	0	0	13.60611		-3.386
0	2	0	-2	0	-205.89221		0.133
3	-1	-2	0	0	9.10846		0.072
3	-1	0	-2	0	9.61372		0.064
3	-3	0	0	0	9.18485		0.651
0	0	2	-2	0	-173.31004		-0.101
2	2	0	-4	0	15.90597		-0.061
4	0	-2	-2	0	7.08101		-1.018
2	-2	-2	2	0	12.76270		0.099
1	3	0	-4	0	37.62535		0.181
0	0	1	0	0	-6798.38366	-5.753	1914.988
2	0	-1	0	0	13.63340		3.846
3	-1	-1	0	0	9.12068		0.496
-1	1	1	0	0	-27.44332		0.644
1	-1	1	0	0	27.66669		-0.646
1	1	1	-2	0	31.96150		-0.281
3	1	-1	-2	0	9.54344		0.081
1	1	-1	0	0	26.98498		-0.221
0	0	-1	2	0	177.84378		-1.240
-1	-1	1	2	0	-31.66378		0.141
2	0	1	-2	0	14.79743		0.060
1	-1	-1	2	0	23.85806		0.082
0	2	-1	0	0	1305.47920		-2.245
0	2	1	-2	0	-199.83997		0.109
0	0	1	1	-1	385.99833		0.207
0	0	1	-1	1	-346.63579		0.186
2	0	0	0	0	13.66079		-366.875
3	-1	0	0	0	9.13293		-47.026
3	1	0	-2	0	9.55685		-9.699
1	1	0	0	0	27.09252		20.650
4	0	0	-2	0	7.09579		-4.371
4	-4	0	0	0	6.88864		-2.499
0	2	0	0	0	1615.74782	0.374	530.897
1	-1	0	2	0	23.94208		-4.891
2	0	0	1	-1	13.16829		1.326
2	0	0	-1	1	14.19156		-1.429
5	-1	0	-2	0	5.64270		-0.494
0	0	2	0	0	-3399.19183	-0.276	186.514
4	0	-2	0	0	6.81670		-0.356
5	-3	0	0	0	5.49218		-0.285
2	2	0	-2	0	14.63159		0.757
-1	1	0	2	0	-32.45086		-1.169
-1	3	0	0	0	-28.03261		-0.745
2	-2	0	2	0	12.81080		-0.278
3	-1	0	1	-1	8.91014		0.172
3	-1	0	-1	1	9.36715		-0.181
3	0	0	-1	0	9.34009		0.159
5	-1	-2	0	0	5.46477		-0.878
5	1	0	-4	0	5.80170		-0.081
4	2	0	-4	0	7.34907		-0.099
1	3	0	-2	0	31.19770		0.405
3	1	-2	0	0	9.05740		0.070
0	-2	0	4	0	96.77985		0.545
-1	-1	0	4	0	-38.52241		-0.186
-1	1	2	0	0	-27.33298		0.120
1	-1	2	0	0	27.77974		-0.122

Tabla 5.30: Continuación.

l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE - cos - (μas)	COEFICIENTE - T sen - (μas)
0	0	0	2	0	182.62109		0.621
1	1	0	-1	1	29.26306		0.083
1	1	0	1	-1	25.22174		-0.072
1	-1	0	1	1	25.62152		-0.063
1	-1	0	3	-1	22.46926		0.055
1	0	0	1	0	25.42006		-0.059
1	1	2	-2	0	32.11247		-0.067
0	2	0	-1	1	-471.94965		-0.581
0	2	0	1	-1	297.91279		-0.366
0	1	0	1	0	328.15251		-0.398
0	4	0	-2	0	-235.96026		-0.203
0	0	0	1	1	365.22475		-0.266
0	0	0	3	-1	121.74933		0.088
0	1	0	0	1	3230.13064		-0.901
0	0	2	1	-1	409.23379		0.084
0	0	2	-1	1	-329.81899		0.068
0	0	0	1	-1	365.25964		0.678
0	0	0	2	0	182.62109	-0.183	-2301.874
0	0	0	1	1	365.22475		38.614
0	0	0	3	-1	121.74933		-89.709
0	0	0	4	-2	91.31273		-1.445
0	0	0	-1	3	-365.29453		-0.129
0	0	0	5	-3	73.05053		-0.050

Tabla 5.31: Coeficientes de la nutación en oblicuidad del eje momento angular debidos a la introducción de la variación secular de I en los cálculos.

l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE - sen - (μas)	COEFICIENTE - T cos - (μas)
0	0	1	0	0	-6798.38366	11.506	3883.976
2	0	-1	0	0	13.63340		7.693
3	-1	-1	0	0	9.12068		0.991
-1	1	1	0	0	-27.44332		1.287
1	-1	1	0	0	27.66669		-1.291
1	1	1	-2	0	31.96150		-0.562
3	1	-1	-2	0	9.54344		0.162
1	1	-1	0	0	26.98498		-0.442
0	0	-1	2	0	177.84378		-2.479
4	-2	-1	0	0	6.85248		0.076
4	0	-1	-2	0	7.08839		0.071
-1	-1	1	2	0	-31.66378		0.281
2	0	1	-2	0	14.79743		0.116
1	-1	-1	2	0	23.85806		0.164
0	2	-1	0	0	1305.47920		-4.491
0	2	1	-2	0	-199.83997		0.218
0	0	1	1	-1	385.99833		0.413
0	0	1	-1	1	-346.63579		0.371
2	-2	1	0	0	13.80525		-0.074

Tabla 5.31: Continuación.

l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE - sen - (μs)	COEFICIENTE - T cos - (μs)
2	0	0	0	0	13.66079		91.719
3	-1	0	0	0	9.13293		11.757
3	1	0	-2	0	9.55685		2.425
1	1	0	0	0	27.09252		-5.163
4	0	0	-2	0	7.09579		1.093
4	-4	0	0	0	6.88864		0.625
0	2	0	0	0	1615.74782	0.093	-132.724
1	-1	0	2	0	23.94208		1.223
2	0	0	1	-1	13.16829		-0.332
2	0	0	-1	1	14.19156		0.357
5	-1	0	-2	0	5.64270		0.124
0	0	2	0	0	-3399.19183	-0.069	-46.629
4	0	-2	0	0	6.81670		0.089
5	-3	0	0	0	5.49218		0.071
2	2	0	-2	0	14.63159		-0.189
-1	1	0	2	0	-32.45086		0.292
-1	3	0	0	0	-28.03261		0.186
2	-2	0	2	0	12.81080		0.069
1	3	0	-2	0	31.19770		-0.101
0	-2	0	4	0	96.77985		-0.137
0	0	0	2	0	182.62109		-0.155
0	2	0	-1	1	-471.94965		0.145
0	2	0	1	-1	297.91279		0.092
0	1	0	1	0	328.15251		0.099
0	4	0	-2	0	-235.96026		0.051
0	0	0	1	1	365.22475		0.066
0	1	0	0	1	3230.13064		0.225
0	0	0	2	0	182.62109	-0.046	575.469
0	0	0	1	1	365.22475		-9.653
0	0	0	3	-1	121.74933		22.427
0	0	0	4	-2	91.31273		0.367

5.7.2 Nutación del ecuador de figura.

Las tablas 5.32 y 5.33 muestran los coeficientes numéricos de la nutación del ecuador de figura relacionados con la introducción de la variación secular de la oblicuidad en los cálculos.

Tabla 5.32: Términos Oppolzer de la nutación en longitud del eje de figura debidos a la introducción de la variación secular de I en los cálculos.

l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE - T sen - (μs)
0	0	1	0	0	-6798.38366	-0.331
2	0	-1	0	0	13.63340	0.416

Tabla 5.32: Continuación.

l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE - T sen - (μs)
3	-1	-1	0	0	9.12068	0.089
2	0	0	0	0	13.66079	-8.891
3	-1	0	0	0	9.13293	-1.760
3	1	0	-2	0	9.55685	-0.346
1	1	0	0	0	27.09252	0.245
4	0	0	-2	0	7.09579	-0.217
4	-4	0	0	0	6.88864	-0.129
0	2	0	0	0	1615.74782	0.103
1	-1	0	2	0	23.94208	-0.066
0	0	0	2	0	182.62109	-3.953
0	0	0	3	-1	121.74933	-0.231

Tabla 5.33: Términos Oppolzer de la nutación en oblicuidad del eje de figura debidos a la introducción de la variación secular de I en los cálculos.

l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	COEFICIENTE - T cos - (μs)
1	-1	0	0	0	27.55455	-0.413
1	1	0	-2	0	31.81194	-0.118
2	0	0	-2	0	14.76529	-0.050
0	0	1	0	0	-6798.38366	0.483
2	0	-1	0	0	13.63340	-0.489
3	-1	-1	0	0	9.12068	-0.096
2	0	0	0	0	13.66079	2.743
3	-1	0	0	0	9.13293	0.552
3	1	0	-2	0	9.55685	0.108
1	1	0	0	0	27.09252	-0.075
4	0	0	-2	0	7.09579	0.069
0	0	0	0	0		-0.058
0	0	0	2	0	182.62109	1.175
0	0	0	3	-1	121.74933	0.069

5.8 Comparaciones y conclusiones.

Las tablas 5.34, 5.35, 5.36 y 5.37 muestran las comparaciones entre los principales coeficientes de la nutación de una Tierra rígida debidos a los armónicos zonales y no zonales de grado 3 y 4, obtenidos por [Souchay & Kinoshita 1997], [Bretagnon *et al.* 1997], [Folgueira *et al.* 1997a,b] y los calculados en este trabajo.

Se observa que la diferencia absoluta entre los coeficientes no excede del microsegundo de arco, en la mayoría de los casos. Esto puede considerarse como una buena prueba de la validez de nuestros cálculos, pues el método utilizado es bastante diferente al de Bretagnon [Bretagnon 1997b, Bretagnon *et al.* 1997] y aunque es el mismo que el elaborado por Kinoshita & Souchay (1990), los desarrollos correspondientes a la energía potencial lunisolar son distintos.

Tabla 5.34: Los principales términos de la nutación en longitud y oblicuidad de la Tierra rígida (en μas) que provienen de J_3 , comparados con Souchay & Kinoshita (1997) [SK].

l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	[SK] Δh (sen)	ΔI (cos)	AQUÍ Δh (sen)	ΔI (cos)	[SK] - AQUÍ Δh (sen)	ΔI (cos)
0	1	0	0	0	3231.49565	104.5	89.1	103.81	88.79	0.7	0.3
0	1	1	0	0	6159.13567	-36.0	-17.6	-35.97	-17.21	0.0	-0.4
0	1	-1	0	0	2190.35011	-32.8	—	-32.26	—	-0.5	—
1	0	0	0	0	27.32158	16.2	13.8	15.91	13.61	0.3	-0.4
1	0	-1	0	0	27.21222	-7.4	—	-7.38	—	0.0	—

Tabla 5.35: Los principales términos de la nutación en longitud y oblicuidad de la Tierra rígida (en μas) que provienen de J_4 , comparados con Souchay & Kinoshita (1997) [SK].

l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	[SK] Δh (sen)	ΔI (cos)	AQUÍ Δh (sen)	ΔI (cos)	[SK] - AQUÍ Δh (sen)	ΔI (cos)
0	0	1	0	0	-6798.38366	0.73	6.83	-5.23	6.73	5.9	0.1
2	0	0	0	0	13.66079	0.13	0.07	0.13	0.07	0.0	0.0
0	0	2	0	0	-3399.19183	-0.61	-0.34	0.53	-0.30	-1.1	0.0

Tabla 5.36: Los principales términos de la nutación en longitud de la Tierra rígida que provienen de C_{3m} y S_{3m} (en μas), comparados con Bretagnon *et al.* (1997) [BRS] y Folgueira *et al.* (1997) [FSK].

$l+g$	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	[BRS] Δh_f (sen)	Δh_f (cos)	[FSK] Δh_f (sen)	Δh_f (cos)	AQUÍ Δh_f (sen)	Δh_f (cos)	[FSK] - AQUÍ Δh_f (sen)	Δh_f (cos)
1	1	0	0	0	0	0.96215	38.13	4.70	38.23	4.70	38.23	4.71	0.0	0.0
1	-1	0	0	0	0	1.03505	34.82	4.27	35.40	4.35	31.48	3.87	3.9	0.5
1	0	1	0	0	0	0.99696	-23.93	-2.99	-24.14	-2.96	-23.99	-2.95	-0.1	-0.1
1	0	-1	0	0	0	0.99758	19.85	2.49	19.94	2.45	19.84	2.44	0.1	0.1
1	1	0	-1	0	0	0.96201	6.01	0.74	6.05	0.74	5.88	0.74	0.2	0.0
1	-1	0	1	0	0	1.03521	5.34	0.66	5.31	0.65	5.18	0.62	0.1	0.1
1	0	1	-1	0	0	0.99682	-4.02	-0.50	-4.03	-0.49	-3.92	-0.48	-0.1	-0.1

Tabla 5.37: Los principales términos de la nutación en oblicuidad de la Tierra rígida que provienen de C_{3m} y S_{3m} (en μas), comparados con Bretagnon *et al.* (1997) [BRS] y Folgueira *et al.* (1997) [FSK].

$l + g$	l_M	g_M	h_M	l_S	g_S	PERÍODO (días)	[BRS] ΔI_f (sen)	ΔI_f (cos)	[FSK] ΔI_f (sen)	ΔI_f (cos)	AQUÍ ΔI_f (sen)	ΔI_f (cos)	[FSK] - AQUÍ ΔI_f (sen)	ΔI_f (cos)
1	-1	0	0	0	0	1.03505	1.64	-13.37	1.58	-12.91	1.57	-12.58	0.1	-0.3
1	0	-1	0	0	0	0.99758	0.99	-7.87	0.97	-7.91	0.97	-7.89	0.0	0.0
1	1	0	0	0	0	0.96215	1.86	-15.12	1.86	-15.11	1.95	-15.87	-0.1	-0.9
1	0	1	0	0	0	0.99696	-1.19	9.52	-1.16	9.46	-1.17	9.54	0.1	0.0
1	-1	0	1	0	0	1.03521	0.26	-2.15	0.26	-2.17	0.25	-1.87	0.0	-0.3
1	1	0	-1	0	0	0.96201	0.29	-2.37	0.29	-2.35	0.29	-2.51	0.0	0.1
1	0	1	-1	0	0	0.99682	-0.20	1.60	-0.20	1.60	-0.19	1.56	0.0	0.0

Apéndice 1

Las siguientes tablas muestran los valores numéricos de las constantes más importantes que aparecen a lo largo de la Memoria, con su respectivo origen [Lieske *et al.* 1977], [Bursa 1992], [Seidelmann 1992].

CONSTANTE	VALOR	UNIDADES	ORÍGEN
J_2	$1.08262607 \times 10^{-3}$	-	GEM-T3
J_3	$-2.53251607 \times 10^{-6}$	-	GEM-T3
J_4	$-1.61856360 \times 10^{-6}$	-	GEM-T3
C_{31}	$2.19018166 \times 10^{-6}$	-	GEM-T3
S_{31}	$0.26918523 \times 10^{-6}$	-	GEM-T3
C_{32}	$0.30893556 \times 10^{-6}$	-	GEM-T3
S_{32}	$-0.21158167 \times 10^{-6}$	-	GEM-T3
C_{33}	$0.10044696 \times 10^{-6}$	-	GEM-T3
S_{33}	$0.19715677 \times 10^{-6}$	-	GEM-T3
C_{41}	-0.508637×10^{-6}	-	GEM-T3
S_{41}	-0.449140×10^{-6}	-	GEM-T3
τ_{31}	-0.122292	rad	-
τ_{32}	0.600501	rad	-
τ_{33}	-1.099595	rad	-
τ_{41}	2.264553	rad	-

CONSTANTE	VALOR	UNIDADES	ORÍGEN
$k_M^{J_2}$	7546.819838	"/siglo	-
$k_S^{J_2}$	3475.258549	"/siglo	-
$k_M^{J_3}$	-0.292654	"/siglo	-
$k_S^{J_3}$	-0.000347	"/siglo	-
$k_M^{J_4}$	-0.003101	"/siglo	-
k_M^{31}	0.254999	"/siglo	-
k_S^{31}	0.000302	"/siglo	-
k_M^{32}	0.043270	"/siglo	-
k_M^{33}	0.025570	"/siglo	-
k_M^{41}	0.001300	"/siglo	-
n_S	129597742.26	rad,100 años	[Bretagnon 1982]
n_M	1732559343.18	rad,100 años	[Chapront-Touzé & Chapront 1983]
$n_g + n_l$	2301216.529	rad,1000 años	-
a	6378.1363	km	IERS Standards 1992
a_M	384747.980674	km	[Seidelmann 1992]
a_S	149598028	km	[Seidelmann 1992]
e_M	0.05490	-	[Seidelmann 1992]
e_S	0.016708617	-	[Seidelmann 1992]
i	0.0898041	rad	[Seidelmann 1992]

Apéndice 2

El uso del MAPLE V en el cálculo de los coeficientes de la nutación

Todos los resultados numéricos recopilados en las Tablas de los Capítulos 2, 3 y 5 de esta Memoria se han obtenido utilizando MAPLE V 3-4. A modo de ejemplo, comentaremos uno de los programas realizados: **nuOh3001** en el que se calculan los términos Oppolzer en longitud relacionados con el armónico zonal J_3 .

```
#
# TÉRMINOS OPPOLZER:  $\Delta_{30}^{(0,1)} \left( \frac{J \sin \vartheta}{\sin I} \right)$ 
#
# Matriz A3:= Tabla 3.1
# Matriz B3:= Tabla 3.2
# Matriz C3:= Tabla 3.3
# Matriz D3:= Tabla 3.4
#

with(linalg):

A3:= matrix(62,7,[ 1, 0, -1, 0, 0, -13254.5, 27.21222 , .....]):
B3:= matrix(192,7,[ 1, 0, 0, 0, 0, -146057.7, 27.32158, .....]):
C3:= matrix(280,7,[ 1, 0, 1, 0, 0, -66545.2, 27.43183, .....]):
D3:= matrix(380,7,[ 3, 0, 0, 0, 0, 1448166.6, 9.10719, .....]):

# Movimientos medios de las variables que forman el argumento  $\chi_i$ 

IM1:=83997.09113:
gM1:=710.17686:
hM1:=-337.57045:
IS1:=6283.31966:
gS1:=0.30011:
```

```

# Valor constante de la oblicuidad de la eclíptica:= ln

Pl:=3.14159265:
ln:=-23.43929111*Pl/180:

# nuOh3001r:= Fichero de resultados

writeto(nuOh3001r);

# Constantes que intervienen en la fórmula (4.6.65)

kJ30:=- (2.9265388/3)*10:
kJ3:=kJ30/(sin(ln)):

# Ngl:=  $n_g + n_l$  = velocidad de rotación de la Tierra

Ngl:=2301216.5:
Ng:=1.0032737634*Ngl:

# Coeficientes  $M_i^1$  para  $\varepsilon = 1$ 

Mi0:= - (3/4)*(sin(ln))*(-1 + 5*(cos(ln))^2):
Mi1:= - (1/8)*(1 + cos(ln))*(-1 - 10*cos(ln) + 15*(cos(ln))^2):
Mi2:= (1/8)*(sin(ln))*(1 + cos(ln))*(1 - 3*cos(ln)):
Mi3:= (1/16)*((sin(ln))^2)*(1 + cos(ln)):

# Coeficientes  $M_i^1$  para  $\varepsilon = -1$ 

mi0:= (3/4)*(sin(ln))*(-1 + 5*(cos(ln))^2):
mi1:= - (1/8)*(1 - cos(ln))*(-1 + 10*cos(ln) + 15*(cos(ln))^2):
mi2:= - (1/8)*(sin(ln))*(1 - cos(ln))*(1 + 3*cos(ln)):
mi3:= (1/16)*((sin(ln))^2)*(1 - cos(ln)):

n0:=vector([lM1,gM1,hM1,lS1,gS1,0,0]):

# Cálculos con la matriz A3 ( $\varepsilon = 1$ )

NI0:=multiply(A3,n0):
Ngll0:=vector(62,1):
Ngll1:=scalarmul(Ngll0,Ng):
NI1:= matadd(Ngll1,NI0,1,-1):
NI2:=i → if NI1[i]>0 then 1/NI1[i] elif NI1[i]=0 then '99999999999999' fi:
NI3:=vector(62,NI2):

```

```

A3I0:=col(A3,6):
A3I1:=scalarmul(A3I0,Mi0):
A3I2:=scalarmul(A3I1,kJ3):
f:=(i,j) → if i=j then A3I2[i] elif i<>j then 0 fi:
A3I3:=matrix(62,62,f):
COEFA3:=multiply(A3I3,NI3);

```

Cálculos con la matriz A3 ($\varepsilon = -1$)

```

nI1:=matadd(NglI1,NI0,1,1):
nI2:=i → if nI1[i]<>0 then 1/nI1[i] elif nI1[i]=0 then '999999999999' fi:
nI3:=vector(62,nI2):
a3I1:=scalarmul(A3I0,mi0):
a3I2:=scalarmul(a3I1,kJ3):
ff:=(i,j) → if i=j then a3I2[i] elif i<>j then 0 fi:
a3I3:=matrix(62,62,ff):
coefA3:=multiply(a3I3,nI3);

```

Cálculos con la matriz B3 ($\varepsilon = 1$)

```

NJ0:=multiply(B3,n0):
NglJ0:=vector(192,1):
NglJ1:=scalarmul(NglJ0,Ng):
NJ1:= matadd(NglJ1,NJ0,1,-1):
NJ2:=i → if NJ1[i]<>0 then 1/NJ1[i] elif NJ1[i]=0 then '999999999999' fi:
NJ3:=vector(192,NJ2):
B3I0:=col(B3,6):
B3I1:=scalarmul(B3I0,Mi1):
B3I2:=scalarmul(B3I1,kJ3):
g:=(i,j) → if i=j then B3I2[i] elif i<>j then 0 fi:
B3I3:=matrix(192,192,g):
COEFB3:=multiply(B3I3,NJ3);

```

Cálculos con la matriz B3 ($\varepsilon = -1$)

```

nJ1:=matadd(NglJ1,NJ0,1,1):
nJ2:=i → if nJ1[i]<>0 then 1/nJ1[i] elif nJ1[i]=0 then '999999999999' fi:
nJ3:=vector(192,nJ2):
b3I1:=scalarmul(B3I0,mi1):
b3I2:=scalarmul(b3I1,kJ3):
gg:=(i,j) → if i=j then b3I2[i] elif i<>j then 0 fi:
b3I3:=matrix(192,192,gg):

```

```
coefB3:=multiply(b3l3,nJ3);
```

```
# Cálculos con la matriz C3 ( $\varepsilon = 1$ )
```

```
NK0:=multiply(C3,n0):
```

```
NgIK0:=vector(280,1):
```

```
NgIK1:=scalarmul(NgIK0,Ng):
```

```
NK1:=matadd(NgIK1,NK0,1,-1):
```

```
NK2:=i → if NK1[i]<>0 then 1/NK1[i] elif NK1[i]=0 then '999999999999' fi:
```

```
NK3:=vector(280,NK2):
```

```
C3l0:=col(C3,6):
```

```
C3l1:=scalarmul(C3l0,Mi2):
```

```
C3l2:=scalarmul(C3l1,kJ3):
```

```
k:=(i,j) → if i=j then C3l2[i] elif i<>j then 0 fi:
```

```
C3l3:=matrix(280,280,k):
```

```
COEFC3:=multiply(C3l3,NK3);
```

```
# Cálculos con la matriz C3 ( $\varepsilon = -1$ )
```

```
nK1:=matadd(NgIK1,NK0,1,1):
```

```
nK2:=i → if nK1[i]<>0 then 1/nK1[i] elif nK1[i]=0 then '999999999999' fi:
```

```
nK3:=vector(280,nK2):
```

```
c3l1:=scalarmul(C3l0,mi2):
```

```
c3l2:=scalarmul(c3l1,kJ3):
```

```
kk:=(i,j) → if i=j then c3l2[i] elif i<>j then 0 fi:
```

```
c3l3:=matrix(280,280,kk):
```

```
coefC3:=multiply(c3l3,nK3);
```

```
# Cálculos con la matriz D3 ( $\varepsilon = 1$ )
```

```
NS0:=multiply(D3,n0):
```

```
NgIS0:=vector(380,1):
```

```
NgIS1:=scalarmul(NgIS0,Ng):
```

```
NS1:=matadd(NgIS1,NS0,1,-1):
```

```
NS2:=i → if NS1[i]<>0 then 1/NS1[i] elif NS1[i]=0 then '999999999999' fi:
```

```
NS3:=vector(380,NS2):
```

```
D3l0:=col(D3,6):
```

```
D3l1:=scalarmul(D3l0,Mi3):
```

```
D3l2:=scalarmul(D3l1,kJ3):
```

```
s:=(i,j) → if i=j then D3l2[i] elif i<>j then 0 fi:
```

```
D3l3:=matrix(380,380,s):
```

```
COEFD3:=multiply(D3l3,NS3);
```

```
# Cálculos con la matriz D3 ( $\varepsilon = -1$ )

nS1:=matadd(NglS1,NS0,1,1):
nS2:=i → if nS1[i]<>0 then 1/nS1[i] elif nS1[i]=0 then '999999999999' fi:
nS3:=vector(380,nS2):
d3l1:=scalarmul(D3l0,mi3):
d3l2:=scalarmul(d3l1,kJ3):
ss:=(i,j) → if i=j then d3l2[i] elif i<>j then 0 fi:
d3l3:=matrix(380,380,ss):
coefD3:=multiply(d3l3,nS3);

writeto(terminal);
```

Los resultados obtenidos **COEFA3**, **coefA3**, **COEFB3**, **coefB3**, **COEFC3**, **coefC3**, **COEFD3** y **coefD3** aparecerán en forma de vector. La Tabla 5.3 muestra los términos Oppolzer en longitud mayores a $0.1 \mu s$.

Conclusiones

En la presente Memoria se ha revisado la teoría de la Rotación de una Tierra rígida que es uno de los problemas abiertos más interesantes y actuales en Astronomía y Geodesia. Los nuevos avances introducidos y desarrollados en este trabajo han mejorado las teorías más recientes en los siguientes puntos:

1. Se ha obtenido un desarrollo de la energía potencial gravitatoria debida al Sol y a la Luna en función de un grupo de cinco variables formado por las tres variables modificadas de Delaunay, la longitud media del Sol y la longitud del perigeo solar. Para ello, se han expresado los polinomios y las funciones asociadas de Legendre del movimiento perturbado de la Luna en función de las correspondientes al movimiento no perturbado, obteniéndose algunas relaciones de recurrencia (Capítulo 2).
2. Las cinco variables consideradas en la descripción del movimiento de la Luna perturbado por el Sol se han mantenido a lo largo de todo este trabajo, a diferencia de otros trabajos en los que se utiliza también la formulación Hamiltoniana.

Además, estas variables se pueden aplicar al estudio de todos los efectos que deben tenerse en cuenta en la teoría de la rotación de una Tierra rígida. De esta forma hemos homogeneizado el problema considerado.

3. las variables modificadas de Delaunay que hemos utilizado presentan las siguientes ventajas:
 - (a) Son variables canónicas. Esta característica es importante para el estudio de los efectos de interacción mencionados en la introducción de esta Memoria.
 - (b) Están mejor definidas, para el caso de excentricidades e inclinaciones pequeñas, que las variables de Delaunay.
 - (c) Tienen un claro significado geométrico y cinemático.
 - (d) Conducen a expresiones no más complicadas que las obtenidas por Kinoshita (1977) y Kinoshita & Souchay (1990).

4. La siguiente tabla muestra el número de términos considerados en cada desarrollo de

$$\left(\frac{a_{M,S}}{r_{M,S}}\right)^{n+1} \{P_{n0}(\sin \beta_{M,S}), P_{nm}(\sin \beta_{M,S}) \{\cos, \sin\} m \lambda_{m,s}\}$$

n	m	Desarrollo debido a	Núm. de términos
2	0	Luna	181
2	1	Luna	834
2	2	Luna	916
2	0	Sol	6
2	2	Sol	13
3	0	Luna	62
3	1	Luna	192
3	2	Luna	280
3	3	Luna	380
3	1	Sol	8
3	3	Sol	11
4	0	Luna	27
4	1	Luna	68
4	2	Luna	121
4	3	Luna	172
4	4	Luna	260

5. Se ha extendido el desarrollo de Kinoshita & Souchay (1990) de la parte de la energía potencial gravitatoria correspondiente al armónico zonal J_3 . Con esta extensión se han calculado los términos Oppolzer del eje de figura, obteniéndose 8 nuevos términos en longitud y 5 en oblicuidad, por encima de $0.1 \mu as$.

Las figuras A y B muestran la evolución temporal (50 años desde el 1 de Enero de 1998) de estos términos, en longitud y en oblicuidad.

6. Se ha estudiado, desde el punto de vista Hamiltoniano, el efecto sobre la nutación que se produce al introducir la variación secular de la oblicuidad en nuestros cálculos, obteniéndose 87 términos de la nutación en longitud y 54 en oblicuidad, por encima del orden de precisión considerado en las teorías actuales de la nutación de la Tierra rígida.

Las figuras C, D, E y F muestran la evolución temporal (50 años desde el 1 de Enero de 1998) de estos términos, en longitud y en oblicuidad.

7. Hemos obtenido, con nuestras nuevas variables, los términos de la nutación que provienen de los armónicos C_{3m} , S_{3m} ($m = 1, 2, 3$) y C_{41} y S_{41} .

También hemos hecho una comparación entre nuestros principales términos y los obtenidos con otros desarrollos y teorías, resultando diferencias en amplitud muy

pequeñas que no exceden de $1 \mu\text{as}$, en la mayoría de los casos, lo que prueba la validez de las modernas teorías de la nutación de la Tierra rígida de los diversos autores y en especial de la desarrollada en esta Memoria.

La principal razón por la que los términos relacionados con los armónicos no zonales de grado 3 y 4 han estado ausentes, hasta ahora, de las teorías de nutación es que estos términos están solamente relacionados con las nutaciones diurnas y subdiurnas, que no están incluidas en la teoría general de la IAU (1980) pues esta teoría está referida al *Polo Celeste de Efemérides (CEP)*, es decir un polo correspondiente al eje de figura medio, libre de movimientos diurnos y subdiurnos con respecto al sistema fijo a la Tierra y fijo al espacio [Moritz & Mueller 1987].

Tenemos que distinguir entre este CEP denominado "*realised*" y el CEP "*astrométrico*", definido por la posición instantánea verdadera del eje de figura en el espacio. La diferencia entre estos dos polos es lo que se llama "*Celestial Pole Offset*", medido a partir de las observaciones VLBI.

En la actualidad, la VLBI proporciona estas diferencias con una resolución temporal muy corta, hasta 15 minutos [Bolotin *et al.* 1997]. Sin embargo, algunos procesos geofísicos, principalmente los debidos a los océanos y a la atmósfera, de período diurno y subdiurno y relacionados con la diferencia entre los dos CEP, no están todavía bien modelados [Dehant *et al.* 1997b]. Por lo tanto, con el fin de estudiar estos fenómenos y validar los modelos es necesario corregir las observaciones para las nutaciones en las bandas de frecuencia diurnas y subdiurnas. Por estas razones, y teniendo en cuenta el orden de precisión alcanzado con las observaciones, se hace necesario incluir las contribuciones diurnas y subdiurnas en la teorías de nutación [Roosbeek 1997].

El estudio de modelos deformables está fuera del contenido de esta Memoria, pero ahora, con las altas precisiones alcanzadas aquí, se está en disposición de acometerlo con precisión, pudiéndose contrastar los resultados con los que se obtienen por VLBI. Esta línea de investigación la recomendamos vivamente.

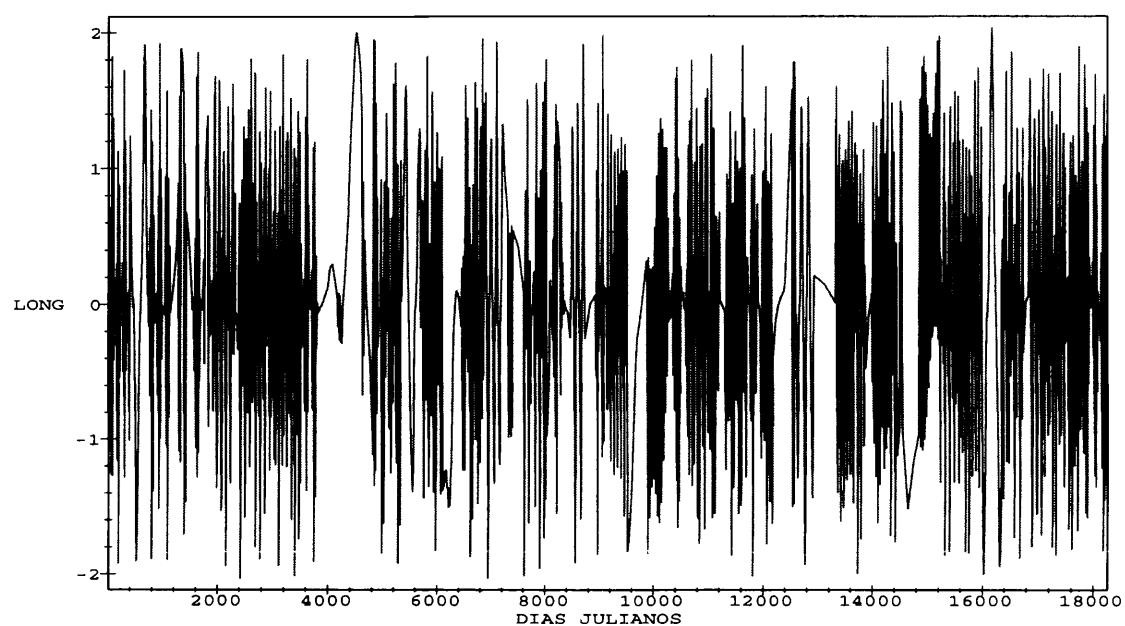


Figura A: Evolución temporal de los términos Oppolzer en longitud del eje de figura debidos al armónico J_3 . Las unidades de las amplitudes están en μas .

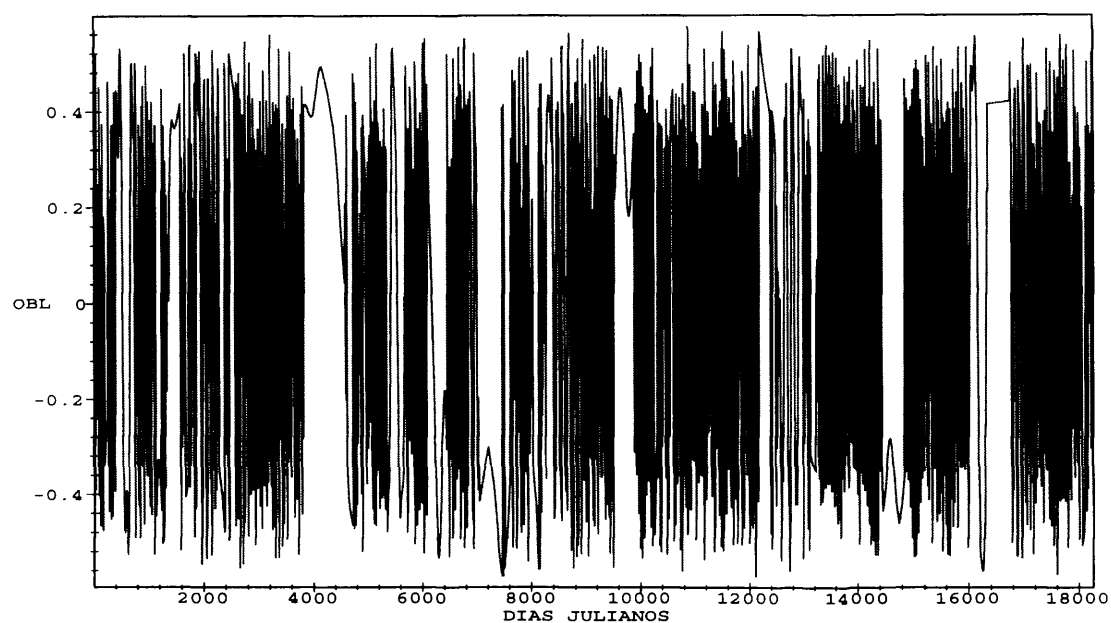


Figura B: Evolución temporal de los términos Oppolzer en oblicuidad del eje de figura debidos al armónico J_3 . Las unidades de las amplitudes están en μs .

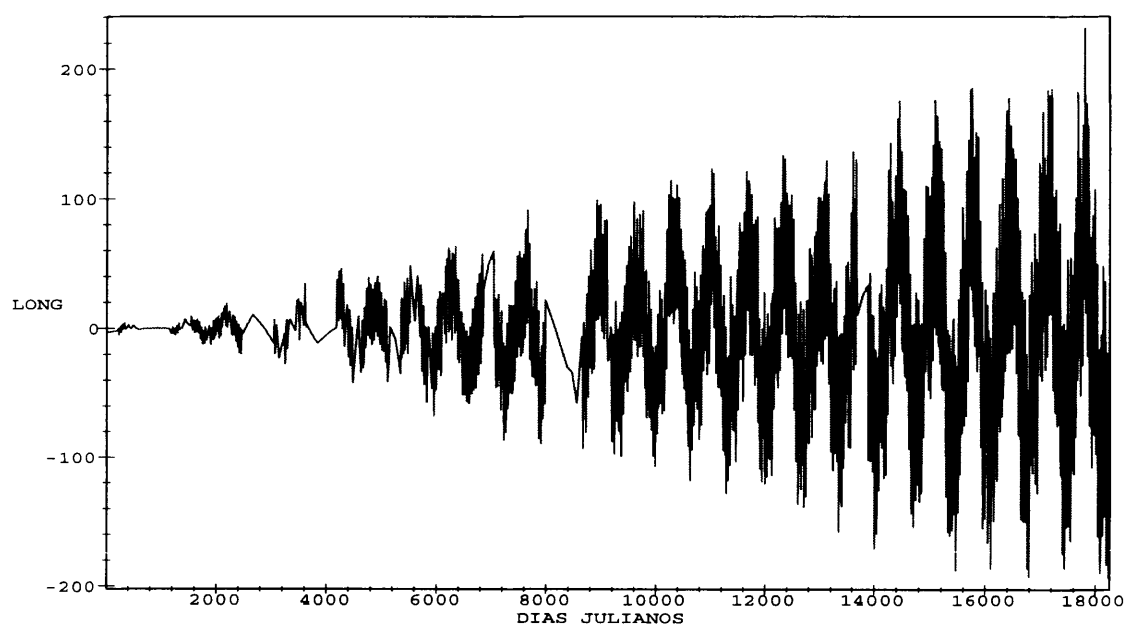


Figura C: Evolución temporal de los términos de Poisson en longitud debidos a la introducción de la variación secular en nuestros cálculos. Las unidades de las amplitudes están en μas .

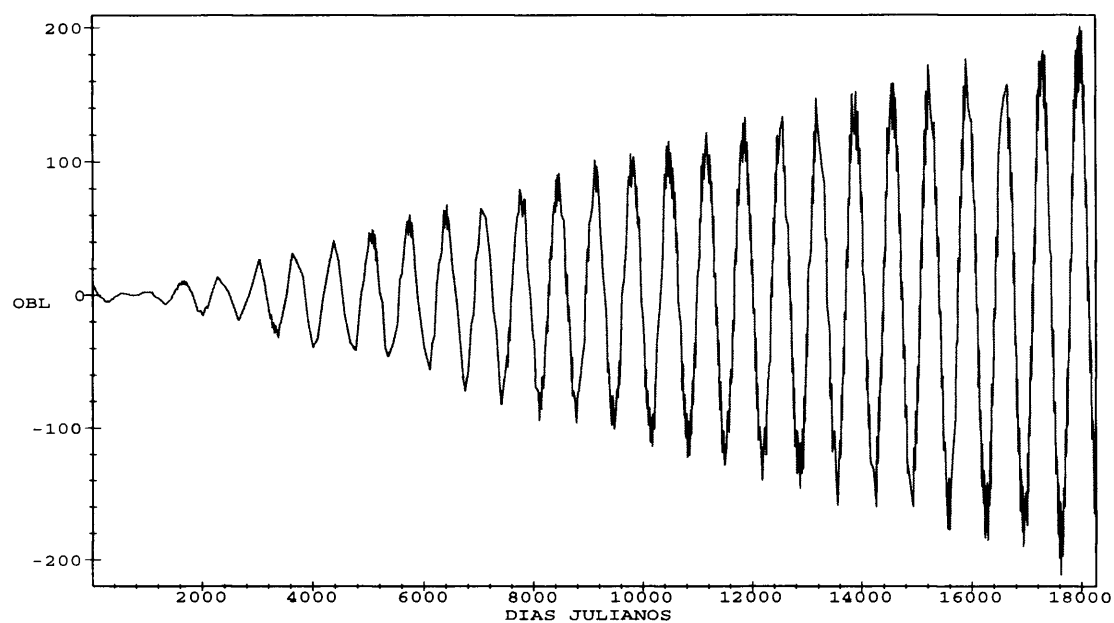


Figura D: Evolución temporal de los términos de Poisson en oblicuidad debidos a la introducción de la variación secular en nuestros cálculos. Las unidades de las amplitudes están en μs .

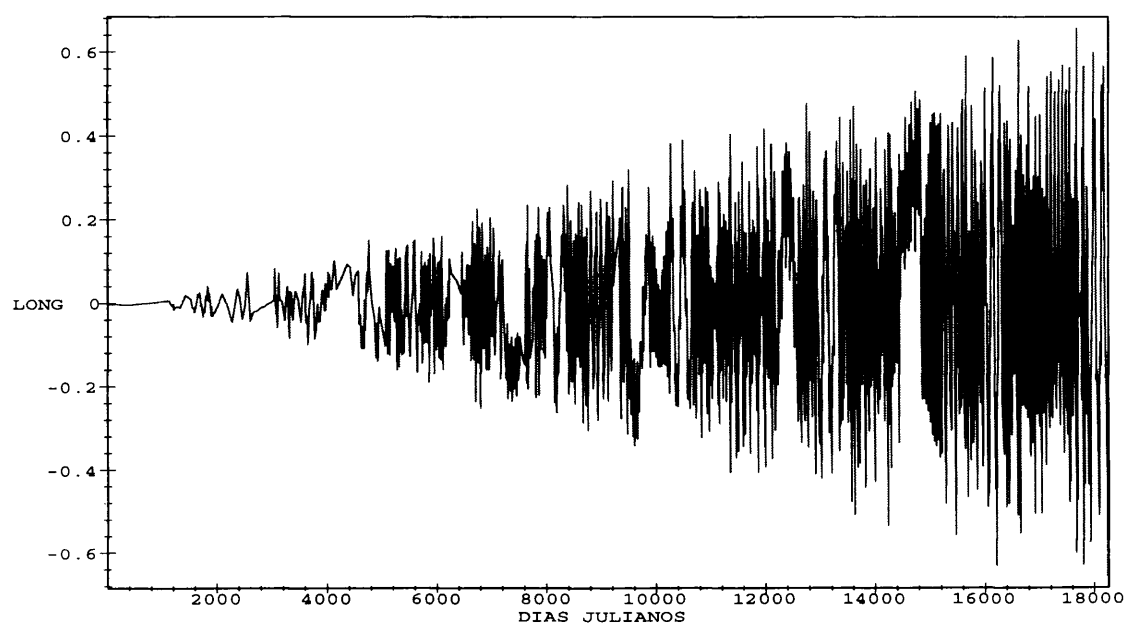


Figura E: Evolución temporal de los términos Oppolzer del eje de figura en longitud debidos a la introducción de la variación secular en nuestros cálculos. Las unidades de las amplitudes están en μas .

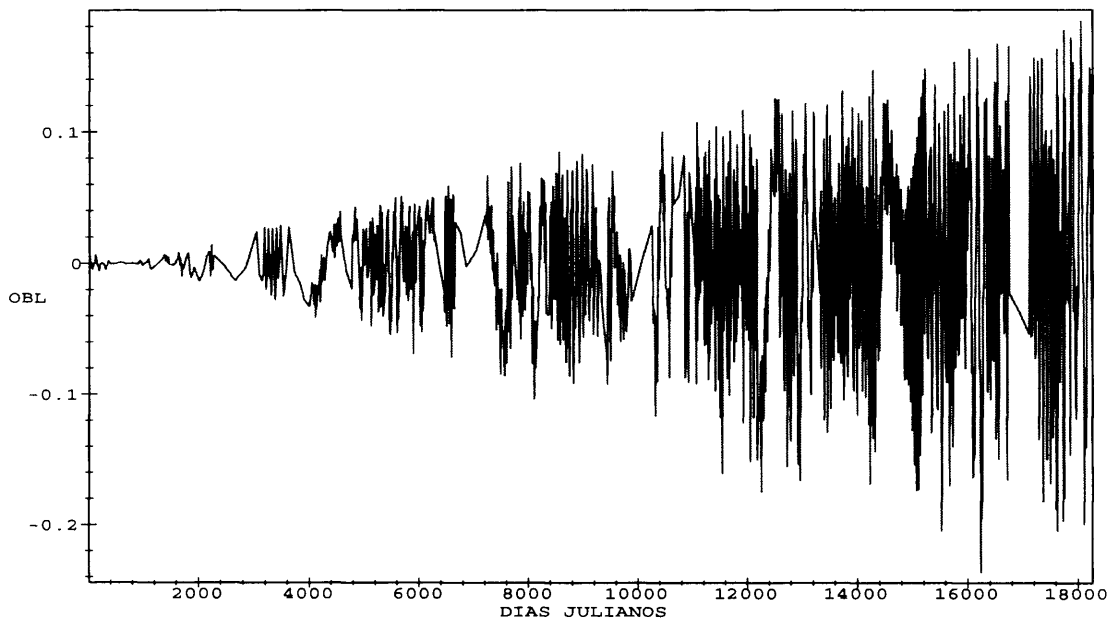


Figura F: Evolución temporal de los términos Oppolzer del eje de figura en oblicuidad debidos a la introducción de la variación secular en nuestros cálculos. Las unidades de las amplitudes están en μas .

Bibliografía

- [Abbott 1984] Abbott D. (Ed.): 1984, 'Astronomers. The biographical dictionary of scientist'. Blond Educational.
- [Andoyer 1923] Andoyer H.: 1923, 'Cours de Mechanique Celeste'. Vol. 1, *Gauthier-Villars*, Paris.
- [Aoki & Kakuta 1971] Aoki S. and Kakuta C.: 1971, 'The excess secular change in the obliquity of the ecliptic and its relation to the internal motion of the Earth'. *Celest. Mech.* **4**, pp. 171–181.
- [Aoki *et al.* 1981] Aoki S., Guinot B., Kaplan G.H., Kinoshita H., McCarthy D.D. and Seidelmann P.K.: 1981, 'The new definition of universal time'. *Astron. Astrophys.* **105**, pp. 359–361.
- [Aoki & Kinoshita 1983] Aoki S. and Kinoshita H.: 1983, 'Note on the relation between the equinox and Guinot's non-rotating origin'. *Celest. Mech.* **29**, pp. 335–360.
- [Aoki 1988] Aoki S.: 1988, 'Relation between the celestial reference system and the terrestrial reference system of a rigid Earth'. *Celest. Mech.* **42**, pp. 309–353.
- [Berry 1961] Berry A.: 1961, 'A short history of Astronomy from earliest times through the nineteenth century'. Dover Publications, INC. New York.
- [Bolotin *et al.* 1997] Bolotin S., Bizouard C., Loyer S. and Capitaine N.: 1997, 'High frequency variations of the Earth's instantaneous angular velocity vector. Determination from VLBI data analysis'. *Astron. Astrophys.* **317**, pp. 601–609.
- [Boyer 1969] Boyer C.B.: 1969, 'Historia de la Matemática'. *Alianza Editorial*.
- [Bretagnon 1982] Bretagnon P.: 1982, 'Théorie du mouvement de l'ensemble des planètes. Solution VSOP82'. *Astron. Astrophys.* **114**, pp. 278–288.
- [Bretagnon 1984] Bretagnon P.: 1984, 'Amelioration des theories planetaires analytiques'. *Celest. Mech.* **34**, pp. 193–201.
- [Bretagnon & Francou 1988] Bretagnon P. and Francou G.: 1988, 'Planetary theories in rectangular and spherical variables. VSOP87 solutions'. *Astron. Astrophys.* **202**, pp. 309–315.

- [Bretagnon 1997a] Bretagnon P.: 1997a, 'On the use of analytical theories in the calculation of precession-nutation'. *Celest. Mech.* **65**, pp. 95–106.
- [Bretagnon 1997b] Bretagnon P.: 1997b, 'The rotation of the rigid Earth'. *Proceedings of IAU Colloquium 165*. Kluwer Academic Publishers. pp. 295–300.
- [Bretagnon *et al.* 1997] Bretagnon P., Rocher P. and Simon J.L.: 1997, 'Theory of the rotation of the rigid Earth'. *Astron. Astrophys.* **319**, pp. 305–317.
- [Brouwer & Clemence 1961] Brouwer D. and Clemence G.M.: 1961, 'Methods of Celestial Mechanics'. *Academic Press*.
- [Bursa 1992] Bursa M.: 1992, 'Parameters of common relevance of Astronomy, Geodesy and Geodynamics'. *Bull. Geod.* **66-2**, pp. 193–197.
- [Camacho & Sevilla 1981] Camacho A.G. y Sevilla M.J.: 1981, 'Algunas relaciones entre los diversos ejes que se consideran en la rotación de la Tierra'. Pub. núm. **116** del *Instituto de Astronomía y Geodesia*, 21 pp., Madrid.
- [Camacho 1983] Camacho A.G.: 1983, 'Modelos matemáticos en el estudio de la rotación de la Tierra'. *Tesis Doctoral*, Universidad Complutense de Madrid.
- [Camacho & Sevilla 1984a] Camacho A.G. y Sevilla M.J.: 1984a, 'Autofrecuencias del movimiento del polo para un modelo de Tierra de tipo Jeffreys-Molodensky'. Pub. núm. **137** del *Instituto de Astronomía y Geodesia*, 14 pp., Madrid.
- [Camacho & Sevilla 1984b] Camacho A.G. y Sevilla M.J.: 1984b, 'The Molodensky problem for an homogeneous liquid core'. *Marees Terrestres Bulletin d'Informations*, Núm. **92**, pp. 6121-6131.
- [Camacho & Sevilla 1984c] Camacho A.G. y Sevilla M.J.: 1984c, 'On the free frequencies for the Sasao-Okubo-Saito equations'. *Comptes Rendus J.L. de Geodynamique*, (Conseil de l'Europe), Vol. **55**, pp. 31-38, Luxemburgo.
- [Campbell & Jefferys 1970] Campbell J.A. and Jefferys W.H.: 1970, 'Equivalence of the perturbation theories of Hori and Deprit'. *Celest. Mech.* **2**, pp. 467–473.
- [Capitaine *et al.* 1986] Capitaine N., Guinot B. and Souchay J.: 1986, 'A non-rotating origin on the instantaneous equator: definition, properties and use'. *Celest. Mech.* **39**, pp. 283–307.
- [Capitaine 1990] Capitaine N.: 1990, 'The celestial pole coordinates'. *Celest. Mech.* **48**, pp. 127–143.
- [Chapront-Touzé 1982] Chapront-Touzé M.: 1982, 'The ELP solution for the main problem of the Moon and some applications'. *Celest. Mech.* **26**, pp. 63–69.

- [Chapront-Touzé & Chapront 1983] Chapront-Touzé M. and Chapront J.: 1983, 'The lunar ephemeris ELP 2000'. *Astron. Astrophys.* **124**, pp. 50–62.
- [Chapront-Touzé & Chapront 1988] Chapront-Touzé M. and Chapront J.: 1988, 'ELP 2000-85: a semi-analytical lunar ephemeris adequate for historical times'. *Astron. Astrophys.* **190**, pp. 342–352.
- [Char *et al.* 1991] Char B.W., Geddes K.O., Gonnet G.H., Leong B.L., Monagan M.B., Watt S.M.: 1991, 'MAPLE V, Library Reference Manual'. *Springer-Verlag*.
- [Choi & Tapley 1973] Choi J.S. and Tapley B.D.: 1973, 'An extended canonical perturbation method'. *Celest. Mech.* **7**, pp. 77–90.
- [Coulston 1970] Coulston Ch. (Ed.): 1970, 'Dictionary of scientific biography'. Vol. **5**. *Princeton University*.
- [Dahlen 1968] Dahlen F.A.: 1968, 'The normal modes of a rotating, elliptical Earth'. *Geophys. J.R. astr. Soc.* **16**, pp. 329–367.
- [Dehant 1986] Dehant V.: 1986, 'Intégration des équations aux déformations d'une Terre elliptique, inélastique, en rotation uniforme et à noyau liquide'. *Tesis Doctoral*, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium, 298 pp.
- [Dehant 1990] Dehant V.: 1990, 'On the nutations of a more realistic Earth model'. *Geophys. J. Int.* **100**, pp. 477–483.
- [Dehant *et al.* 1993] Dehant V., Hinderer J., Legros H. and Lefftz M.: 1993, 'Analytical approach to the computation of the Earth, the outer core and the inner core rotational motions'. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **76**, pp. 259–282.
- [Dehant *et al.* 1996] Dehant V., Bizouard Ch., Hinderer J., Legros H. and Greff-Lefftz, M.: 1996, 'On atmospheric pressure perturbations on precession and nutations'. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **96**, pp. 25–39.
- [Dehant & Capitaine 1997] Dehant V. and Capitaine N.: 1997, 'On the precession constant: values and constraints on the dynamical ellipticity; link with the Oppolzer terms and Tilt-Over-Mode'. *Celest. Mech.* **65**, pp. 439–548.
- [Dehant & Defraigne 1997a] Dehant V. and Defraigne P.: 1997a, 'Nutation for a non-rigid Earth'.
- [Dehant & Defraigne 1997b] Dehant V. and Defraigne P.: 1997b, 'New transfer functions for nutations of a non-rigid Earth'. *J. Geophys. Res.*, Vol. **102**, N. B.12, pp. 27659–27687.
- [Dehant *et al.* 1997a] Dehant V., Capitaine N. and Defraigne P.: 1997a, 'Comparison between values of the dynamical flattening of the Earth derived from various kinds of observations (Precession, J_2 , seismology)'. *Proc. Journées Systèmes de Référence*, Septembre 1996, Paris, France, ed. N. Capitaine, pp. 103–104.

- [Dehant *et al.* 1997b] Dehant V. and Arias F., Brzezinski A., Buffett B., Capitaine N., Carter W., Defraigne P., Dickey J., Eubanks M., Feissel M., Fliegel H., Fukushima T., Forte A., Gross R., Hartmann T., Herring T., Kinoshita H., Mathews P.M., McCarthy D., Melbourne J., Molodensky S., Roosbeek F., Salstein D., Sasao T., Soffel M., Souchay J., Vondrak J., Wahr J., Williams J., Yatskiv Y., Zhu S.Y.: 1997b, 'Considerations for the future of non-rigid Earth nutation theory'. *JSR96*.
- [Dehant *et al.* 1997c] Dehant V., Wilson C.R., Salstein D.A., Chao B.F., Gross R.S., Le Provost Ch. and Ponte R.M.: 1997c, 'Study of Earth's rotation and geophysical fluids progresses'. *EOS, Transactions, American Geophysical Union*, Vol. **78**, N. **34**, pp. 357–360.
- [Dehant *et al.* 1997d] Dehant V., Feissel M., Defraigne P., Roosbeek F. and Souchay J.: 1997d, 'Could the energy near the FCN and the FICN be explained by luni-solar or atmospheric forcing?'. *Geophys. J. Int.* **130**, pp. 535–546.
- [Dehant 1997] Dehant V.: 1997, 'Circular 16 WG on non-rigid Earth nutation theory'.
- [Dehant & Fukushima 1997] Dehant V. and Fukushima T. (SOC): 1997, 'Resolutions of Joint Discussion 3 on precession-nutation and astronomical constants for the dawn of the 21st century'.
- [Defraigne *et al.* 1995] Defraigne P., Dehant V. and Pâquet P.: 1995, 'Link between the retrograde-prograde nutations and nutations in obliquity and longitude'. *Celest. Mech.* **62**, pp. 363–376.
- [Deprit 1969] Deprit A.: 1969, 'Canonical transformations depending on a small parameter'. *Celest. Mech.* **1**, pp. 12–30.
- [Ekman91] Ekman M.: 1991, 'A concise history of the theories of tides, precession-nutation and polar motion (from Antiquity to 1950)'. Ed. P. Melchior. *Marees terrestres Bulletin d'informations*.
- [Folgueira 1991] Folgueira M.: 1991, 'Rotación de la Tierra y modelos terrestres'. *Tesina de licenciatura*, Universidad Complutense de Madrid.
- [Folgueira & Sevilla 1991] Folgueira M. y Sevilla M.J.: 1991, 'Estudio teórico de la variación de la duración del día'. *Boletín Astronómico del Observatorio de Madrid*, Vol. **XII**, N. **4**, pp. 146–159. MOPU, Madrid.
- [Folgueira & Sevilla 1996a] Folgueira M. y Sevilla M.J.: 1996a, 'A new expression of the potential gravitational energy for the Earth rotation problem'. *Proceedings of the Third International Workshop on Positional Astronomy and Celestial Mechanics*, pp. 211–224. Valencia.
- [Folgueira & Sevilla 1996b] Folgueira M. y Sevilla M.J.: 1996b, 'Repercusión de la elasticidad terrestre en el movimiento del polo'. *Física de la Tierra*, N. **8**, pp. 145–153. ISSN: 0214-4557. UCM, Madrid.

- [Folgueira & Sevilla 1996c] Folgueira M. y Sevilla M.J.: 1996c, 'A comparative analysis of different sets of canonical variables in the treatment of the Earth's nutation'. *Fourth International Workshop on Positional Astronomy and Celestial Mechanics*. Peñíscola.
- [Folgueira *et al.* 1997a] Folgueira M. , Souchay J. and Kinoshita H.: 1997a, 'Effects on the nutation of non-zonal harmonics of third degree'. *Celest. Mech.* (*en prensa*).
- [Folgueira *et al.* 1997b] Folgueira M., Souchay J. and Kinoshita H.: 1997b, 'Effects on the nutation of C_{4m} and S_{4m} '. *Celest. Mech.* (*aceptado*).
- [Fukushima 1991] Fukushima T.: 1991, 'Geodesic nutation'. *Astron. Astrophys.* **244**, pp L11-L12.
- [Fukushima 1994] Fukushima T.: 1994, 'New canonical variables for orbital and rotational motions'. *Celest. Mech. and Dyn. Astr.* **60**, pp. 57-68.
- [Fukushima 1995] Fukushima T.: 1995, 'A numerical scheme to integrate the rotational motion of a rigid body'.
- [Getino 1989] Getino J.: 1989, 'Teoría Hamiltoniana del movimiento de rotación de una Tierra deformable'. *Tesis Doctoral*, Universidad de Valladolid.
- [Getino & Ferrándiz 1990] Getino J. and Ferrándiz J.M.: 1990, 'A Hamiltonian theory for an elastic Earth: canonical variables and kinetic energy'. *Celest. Mech.* **49**, pp. 303-326.
- [Getino & Ferrándiz 1991a] Getino J. and Ferrándiz J.M.: 1991a, 'A Hamiltonian theory for an elastic Earth: elastic energy of deformation'. *Celest. Mech.* **51**, pp. 17-34.
- [Getino & Ferrándiz 1991b] Getino J. and Ferrándiz J.M.: 1991b, 'A Hamiltonian theory for an elastic Earth: first order analytical integration'. *Celest. Mech.* **51**, pp. 35-65.
- [Getino & Ferrándiz 1991c] Getino J. and Ferrándiz J.M.: 1991c, 'A Hamiltonian theory for an elastic Earth: secular rotational acceleration'. *Celest. Mech.* **52**, pp. 381-396.
- [Getino 1992] Getino J.: 1992, 'Elastic energy for a deformable Earth: general expression'. *Celest. Mech.* **53**, pp. 11-36.
- [Getino 1993] Getino J.: 1993, 'Perturbed nutations, Love numbers and elastic energy of deformation for Earth models 1066A and 1066B'. *Z.A.M.P.* **44**, pp. 998-1021.
- [Getino & Ferrándiz 1994] Getino J. and Ferrándiz J.M.: 1994, 'A rigorous Hamiltonian approach to the rotation of elastic bodies'. *Celest. Mech.* **58**, pp. 277-295.
- [Getino & Ferrándiz 1995a] Getino J.: 1995a, 'Kinetic energy of a non-spherical elastic Earth mantle with Andoyer variables'. *Celest. Mech.* **61**, pp. 21-49.
- [Getino & Ferrándiz 1995b] Getino J. and Ferrándiz J.M.: 1995b, 'On the effect of mantle's elasticity on the Earth's rotation'. *Celest. Mech.* **61**, pp. 117-180.

- [Getino 1995a] Getino J.: 1995a, 'An interpretation of the core-mantle interaction problem'. *Geophys. J. Int.* **120**, pp. 693-705.
- [Getino 1995b] Getino J.: 1995b, 'Forced nutations of a rigid mantle-liquid core Earth model in canonical formulation'. *Geophys. J. Int.* **122**, pp. 803-814.
- [Getino & Ferrándiz 1996a] Getino J. and Ferrándiz J.M.: 1996a, 'Canonical treatment of dissipative forces between Earth core and mantle'. *Proceedings of the IAU Symposium 172*. París.
- [Getino & Ferrándiz 1996b] Getino J. and Ferrándiz J.M.: 1996b, 'Recent progress in the Hamiltonian theory for the deformable Earth: effect of dissipative forces and free and forced nutations'. *Proceedings of the Journées 1995, Systèmes de Référence spatio-temporels*, Varsovia, Polonia, eds. N. Capitaine, B. Kolaczek and S. Debarbat, pp. 79-82.
- [Gilbert & Dziewonski 1975] Gilbert F. and Dziewonski A.M.: 1975, 'An application of normal mode theory to the retrieval of structural parameters and source mechanisms from seismic spectra'. *Phil. Trans. R. Soc. A.* **278**, pp. 187-269.
- [Goldstein 1976] Goldstein B.R.: 1976, 'Levi ben Gerson's analysis of precession'. *Journal for the History of Astronomy*, Vol. **6**, ed. M.A. Hoskin.
- [Goldstein 1988] Goldstein H.: 1988, 'Mecánica Clásica'. *Editorial Reverté, S.A.*
- [Hartmann & Soffel 1994] Hartmann T. and Soffel M.: 1994, 'The nutation of a rigid Earth model: direct influences of the planets'. *Astron. J.* **108**, N.3, pp. 1115-1120.
- [Hartmann & Soffel 1997] Hartmann T. and Soffel M.: 1997, 'New nutation series for a rigid Earth'. *Proceedings of IAU Colloquium 165*. Kluwer Academic Publishers. pp. 287-293.
- [Heiskanen & Moritz 1985] Heiskanen W.A. and Moritz H.: 1985, 'Geodesia Física'. *Instituto Geográfico Nacional. Instituto de Astronomía y Geodesia*. Madrid. España.
- [Hori 1966] Hori G.: 1966, 'Theory of general perturbations with unspecified canonical variables'. *Publ. Astr. Soc. Japan.*, Vol. **8**, N.4, pp. 287-296.
- [Hori 1970] Hori G.: 1970, 'Comparison of two perturbation theories based on canonical transformations'. *Publ. Astr. Soc. Japan.* **22**, pp. 191-198.
- [Hori 1973] Hori G.: 1973, 'Theory of general perturbations'. *Recent Advances in Dynamical Astronomy*, pp. 231-249.
- [IAU 1998] IAU: 1998, 'International Astronomical Union. Information Bulletin'. **81**, Enero 1998.
- [Jupp 1972] Jupp A.H.: 1972, 'On the free rotation of a rigid body'. *Celest. Mech.* **9**, pp. 3-20.

- [Kamel 1969] Kamel A.A.: 1969, 'Expansion formulae in canonical transformations depending on a small parameter'. *Celest. Mech.* **1**, pp. 190–199.
- [Kinoshita 1972] Kinoshita H.: 1972, 'First-order perturbations of the two finite body problem'. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, Vol. **24**, N. **4**.
- [Kinoshita *et al.* 1974] Kinoshita H., Hori G. and Nakai H.: 1974, 'Modified Jacobi polynomials and its applications to expansions of disturbing functions'. *Annals of the Tokyo Astronomical Observatory. Second series*, Vol. **XIV**, N. **1**.
- [Kinoshita 1977] Kinoshita H.: 1977, 'Theory of the rotation of the rigid Earth'. *Celest. Mech.* **15**, pp. 277–326.
- [Kinoshita & Aoki 1983] Kinoshita H. and Aoki S.: 1983, 'The definition of the ecliptic'. *Celest. Mech.* **31**, pp. 329–338.
- [Kinoshita & Sasao 1989] Kinoshita H. and Sasao T.: 1989, 'Theoretical aspects of the Earth rotation'. *Reference Frames in Astronomy and Geophysics*. Kluwer Academic Publishers, pp. 173–211.
- [Kinoshita & Souchay 1990a] Kinoshita H. and Souchay J.: 1990a, 'The theory of the nutation for the rigid Earth model at the second order'. *Celest. Mech.* **48**, pp. 187–265.
- [Kinoshita & Souchay 1990b] Kinoshita H. and Souchay J.: 1990b, 'Files and program for the computation of the nutation of the Earth for a new rigid Earth model (Kinoshita and Souchay, 1990) and a non-rigid Earth model (Wahr, 1979)'.
- [Kinoshita 1991] Kinoshita H.: 1991, 'Analytical expansions of torque-free motions for short and long axis modes'. *Celest. Mech.* **53**, pp. 365–375.
- [Kolaczek 1989] Kolaczek B.: 1989, 'Earth rotating monitoring'. *Reference Frames in Astronomy and Geophysics*. Kluwer Academic Publishers, pp. 213–240.
- [Kubo 1979] Kubo Y.: 1979, 'A core-mantle interaction in the rotation of the Earth'. *Celest. Mech.* **19**, pp. 215–241.
- [Kubo 1982] Kubo Y.: 1982, 'Perturbations by the oblateness of the Earth and by the planets in the motion of the Moon'. *Celest. Mech.* **26**, pp. 97–112.
- [Kubo 1991] Kubo Y.: 1991, 'Solution to the rotation of the elastic Earth by method of rigid dynamics'. *Celest. Mech.* **50**, pp. 165–187.
- [Kuhn 1978] Kuhn T.S.: 1978, 'La revolución copernicana'. *Ariel*, Barcelona.
- [Lambeck 1980] Lambeck K.: 1980, 'The Earth's variable rotation: geophysical causes and consequences'. *Cambridge University Press*, London.

- [Lambeck 1989] Lambeck K.: 1989, 'The Earth's variable rotation: some geophysical causes'. *Reference Frames in Astronomy and Geophysics*. Kluwer Academic Publishers, pp. 241–284.
- [Lefftz *et al.* 1991] Lefftz M., Legros H. and Hinderer J.: 1991, 'Non-linear equations for the rotation of a viscoelastic planet taking into account the influence of a liquid core'. *Celest. Mech.* **52**, pp. 13–43.
- [Lieske *et al.* 1977] Lieske J.H., Lederle T., Fricke W. and Morando B.: 1977, 'Expressions for the precession quantities based upon the IAU (1976) system of astronomical constants'. *Astron. Astrophys.* **58**, pp 1–16.
- [López 1969] López Piñero J.M.: 1969, 'La introducción de la ciencia moderna en España'. *Ariel*, Barcelona.
- [Mason 1985a] Mason S.F.: 1985a, 'Historia de las ciencias. 2. La revolución científica de los siglos XVI y XVII'. *Alianza Editorial*, Madrid.
- [Mason 1985b] Mason S.F.: 1985b, 'Historia de las ciencias. 3. La ciencia del siglo XVIII'. *Alianza Editorial*, Madrid.
- [Mason 1986] Mason S.F.: 1986, 'Historia de las ciencias. 4. La ciencia del siglo XIX'. *Alianza Editorial*, Madrid.
- [Mersman 1970] Mersman W.A.: 1970, 'A new algorithm for the Lie transformation'. *Celest. Mech.* **3**, pp. 81–89.
- [Mersman 1971] Mersman W.A.: 1971, 'Explicit recursive algorithms for the construction of equivalent canonical transformations'. *Celest. Mech.* **3**, pp. 384–389.
- [Moritz 1984] Moritz H. (Sevilla M.J. Redactor y Ed.): 1984, 'Sistemas de referencia en Geodesia y rotación de la Tierra'. *II Curso de Geodesia Superior*, I.A.G-I.G.N., ISBN 84-505-0219-5, 90 pp. CSIC-UCM. Instituto de Astronomía y Geodesia. Madrid.
- [Moritz & Mueller 1987] Moritz H. and Mueller I.I.: 1987, 'Earth rotation. Theory and observation'. *Ungar*. New York.
- [Munk & MacDonald 1960] Munk W.H. and MacDonald G.J.F.: 1960, 'The rotation of the Earth, a geophysical discussion'. *Cambridge University Press*, London.
- [Newton 1983] Newton I.: 1983, 'El sistema del mundo'. *Alianza Editorial*, Madrid.
- [Newton 1987a] Newton I.: 1987a, 'Principios matemáticos de la filosofía natural. 1. introducción y libro I'. *Alianza Editorial*, Madrid.
- [Newton 1987b] Newton I.: 1987b, 'Principios matemáticos de la filosofía natural. 2. libro II y libro III'. *Alianza Editorial*, Madrid.

- [Pannekoek 1961] Pannekoek A.: 1961, 'A history of Astronomy'. *George Allen and Unwin Ltd.*
- [Pâquet *et al.* 1997] Pâquet P., Dehant V. and Bruyninx C.: 1997, 'Earth rotation observations and their geophysical implications'. *Bull. Astron. Belgrade*. N. **156**, pp. 89–108.
- [Pedersen & Pihl 1974] Pedersen O. and Pihl M.: 1974, 'Early Physics and Astronomy. A historical introduction'.
- [Ptolomeo 1987] Ptolomeo C.: 1987, 'La hipótesis de los planetas'. *Alianza Universidad*, Madrid.
- [Romero 1983] Romero P.: 1983, 'Un catálogo provisional FK5 para uso en Astronomía geodésica'. Pub. núm. **130** del *Instituto de Astronomía y Geodesia*, 19 pp., Madrid.
- [Romero 1984] Romero P.: 1984, 'Mareas terrestres y rotación de la Tierra'. *Tesis doctoral*, Universidad Complutense de Madrid.
- [Romero & Sevilla 1985a] Romero P. and Sevilla M.J.: 1985a, 'The Sasao-Okubo-Saito equations by Hamilton theory. First results'. *Proceedings del I Hotine-Marussi Symposium on Mathematical Geodesy*.
- [Romero & Sevilla 1985b] Romero P. y Sevilla M.J.: 1985b, 'On the Hamilton equations for the Earth'. *Comptes Rendus J.L. de Geodynamique*, (Conseil de l'Europe), Vol. **58**, pp. 9–11, Luxemburgo.
- [Romero & Sevilla 1986a] Romero P. y Sevilla M.J.: 1986a, 'Tratamiento canónico del problema de Poincaré. Movimiento del polo'. Pub. núm. **152** del *Instituto de Astronomía y Geodesia*, 17 pp., Madrid.
- [Romero & Sevilla 1986b] Romero P. y Sevilla M.J.: 1986b, 'Hamiltonian formulation of the polar motion for an elastic Earth's model'. Pub. núm. **143** del *Instituto de Astronomía y Geodesia*, 26 pp., Madrid.
- [Romero & Sevilla 1986c] Romero P. y Sevilla M.J.: 1986c, 'The Sasao-Okubo-Saito equations by Hamilton theory. First results'. Pub. núm. **144** del *Instituto de Astronomía y Geodesia*, 24 pp., Madrid.
- [Ronan 1972] Ronan C.A.: 1972, 'Discovering the universe. A history of Astronomy'. *Heinemann Educational Books*. London.
- [Roosbeek 1997] Roosbeek F.: 1997, 'Comunicación particular'.
- [Roosbeek & Dehant 1997] Roosbeek F. and Dehant V.: 1997, *Celest. Mech.* (en prensa).
- [Sasao *et al.* 1980] Sasao T., Okubo S. and Saito M.: 1980, 'A simple theory on the dynamical effects of a stratified fluid core upon nutational motion of the Earth'. *Nutation and the Earth's Rotation*, pp. 165–183.

- [Schastok *et al.* 1990] Schastok J., Soffel M. and Ruder H.: 1990, 'Numerical derivation of forced nutation terms for a rigid Earth'. *Celest. Mech.* **47**, pp. 219–223.
- [Seidelmann 1982] Seidelmann P.K.: 1982, '1980 IAU report of nutation: The final report of the IAU Working Group on nutation'. *Celest. Mech.* **27**, pp. 79–106.
- [Seidelmann 1992] Seidelmann P.K. (eds.): 1992, 'Explanatory supplement to the astronomical almanac'. *University Science Books*. Mill Valley, California.
- [Sevilla 1982] Sevilla M.J.: 1982, 'Modificaciones del movimiento del eje de rotación de la Tierra al considerar modelos deformables'. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*. Tomo **LXXVI**, N. 1, pp. 177–180.
- [Sevilla & Camacho 1982] Sevilla M.J. y Camacho A.G.: 1982, 'Deformación rotacional de una Tierra elástica'. *Revista de Geofísica*. Vol. **38**, pp. 179–187.
- [Sevilla & Camacho 1983a] Sevilla M.J. y Camacho A.G.: 1983a, 'Deformación de una Tierra elástica por efecto de marea'. Pub. núm. **127** del *Instituto de Astronomía y Geodesia*, 7 pp., Madrid.
- [Sevilla & Camacho 1983b] Sevilla M.J. y Camacho A.G.: 1983a, 'Autofrecuencias de las ecuaciones de Helmholtz y Louville para un modelo de Tierra de tipo Jeffreys simplificado'. Pub. núm. **130** del *Instituto de Astronomía y Geodesia*, 16 pp., Madrid.
- [Sevilla & Romero 1983a] Sevilla M.J. y Romero P.: 1983a, 'Comparación de series de nutación'. Pub. núm. **127** del *Instituto de Astronomía y Geodesia*, 54 pp., Madrid.
- [Sevilla & Romero 1983b] Sevilla M.J. y Romero P.: 1983b, 'Movimiento solo forzado del polo para una Tierra elástica'. Pub. núm. **130** del *Instituto de Astronomía y Geodesia*, 19 pp., Madrid.
- [Sevilla & Romero 1985] Sevilla M.J. and Romero P.: 1985, 'Polar motion for an elastic Earth model using a canonical theory'. *Bull. Geod.* **59**, pp. 396–411, París.
- [Sevilla & Romero 1986] Sevilla M.J. and Romero P.: 1986, 'Hamiltonian formulation of the polar motion for an elastic Earth's model'. *Proceedings del I Hotine-Marussi Symposium on Mathematical Geodesy*, pp. 703–728.
- [Sevilla *et al.* 1986] Sevilla M.J., Camacho A.G. y Romero P.: 1986, 'Cinco artículos sobre rotación de la Tierra'. Pub. núm. **147** del *Instituto de Astronomía y Geodesia*, 40 pp., Madrid.
- [Sevilla & Romero 1987] Sevilla M.J. and Romero P.: 1987, 'Polar motion for an elastic Earth model with a homogeneous liquid core using a canonical theory'. *Bull. Geod.* **61**, N. 1, pp. 1–20, París.
- [Sevilla 1989] Sevilla M.J.: 1989, 'Mecánica Celeste clásica'. *Instituto de Astronomía y Geodesia*. Universidad Complutense de Madrid, N. 5.

- [Sevilla & Folgueira 1996] Sevilla M.J. y Folgueira M.: 1996, 'Energía elástica para el modelo de Molodensky'. *Avances de Geofísica y Geodesia*, Vol. 1, pp. 73-77. IGN, Madrid.
- [Simon *et al.* 1994] Simon J.L., Bretagnon P., Chapront J., Chapront-Touzé M., Francou, G. and Laskar, J.: 1994, 'Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the Moon and the planets'. *Astron. Astrophys.* **282**, pp. 663-683.
- [Smart 1953] Smart W.M.: 1953, 'Celestial Mechanics'. *Longmans*.
- [Souchay & Kinoshita 1991] Souchay J. and Kinoshita H.: 1991, 'Comparison of new nutation series with numerical integration'. *Celest. Mech.* **52**, pp. 45-55.
- [Souchay 1993] Souchay J.: 1993, 'Comparison between theories of nutation for a rigid Earth model'. *Astron. Astrophys.* **276**, pp. 266-277.
- [Souchay *et al.* 1995] Souchay J., Feissel M., Bizouard C., Capitaine N. and Bougeard M.: 1995, 'Precession and nutation for a non-rigid Earth: comparison between theory and VLBI observations'. *Astron. Astrophys.* **229**, pp. 277-287.
- [Souchay & Kinoshita 1996] Souchay J. and Kinoshita H.: 1996, 'Corrections and new developments in rigid Earth nutation theory: I. Lunisolar influence including indirect planetary effects'. *Astron. Astrophys.* **312**, pp. 1017-1030.
- [Souchay *et al.* 1996] Souchay J., Feissel M. and Ma C.: 1996, 'Precise modeling of nutation and VLBI observations'. *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **116**, pp. 473-481.
- [Souchay & Kinoshita 1997] Souchay J. and Kinoshita H.: 1997, 'Corrections and new developments in rigid Earth nutation theory: II. Influence of second-order geopotential and direct planetary effect'. *Astron. Astrophys.* **318**, pp. 639-652.
- [Souchay 1997a] Souchay J.: 1997, 'Agreements and disagreements between theories of rigid Earth nutation'. *Proceedings of IAU Colloquium 165*. Kluwer Academic Publishers. pp. 319-324.
- [Souchay *et al.* 1997] Souchay J., Loysel B., Kinoshita H. and Folgueira M.: 1997, 'Corrections and new developments in rigid Earth nutation theory: III. Final tables "REN-2000" including crossed-nutation and spin-orbit coupling effects'. *Astron. Astrophys.*
- [Souchay 1997b] Souchay J.: 1997, 'Carta particular'. (13 de Septiembre de 1997).
- [Szegő 1939] Szegő G.: 1939, 'Orthogonal polynomials', American Mathematical Society. Colloquium publications, Vol. **XXIII**.
- [Taton & Wilson 1989] Taton R. and Wilson C. (eds.): 1989, 'The general history of Astronomy. Planetary Astronomy from the Renaissance to the rise of Astrophysics. Part A: Tycho Brahe to Newton'. *Cambridge University Press*, Vol. **2**.
- [Tisserand 1892] Tisserand F.: 1892, 'Mécanique Céleste'. *Gauthier-Villars*, Paris.

- [Torroja 1980] Torroja J.M.: 1980, 'El sistema del mundo desde la Antigüedad hasta Alfonso X el Sabio'. Curso de 6 conferencias: Abril-Mayo de 1979. *Instituto de España*.
- [Torroja 1981] Torroja J.M.: 1981, 'Historia de la Ciencia árabe: los sistemas astronómicos'. Pub. núm. **122** del *Instituto de Astronomía y Geodesia*, 16 pp., Madrid.
- [Wahr 1979] Wahr J.M.: 1979, 'The tidal motions of a rotating, elliptical, elastic and oceanless Earth'. *Tesis Doctoral*, Universidad de Colorado.
- [Wahr et al. 1981] Wahr J.M., Sasao T. and Smith M.L.: 1981, 'Effect of the fluid core on changes in the length of day due to long period tides'. *Geophys. J.R. astr. Soc.* **64**, pp. 635-650.
- [Wahr 1983] Wahr J.M.: 1983, 'The effects of the atmosphere and oceans on the Earth's wobble and on the seasonal variations in the length of day. II Results'. *Geophys. J.* **74**, pp. 451-487.
- [Wahr 1986a] Wahr J.M.: 1986a, 'The Earth's inconstant rotation'. *Sky and Telescope*.
- [Wahr 1986b] Wahr J.M.: 1986b, 'Geophysical aspects of polar motion, variations in the length of day and lunisolar nutations'. *Space Geodesy and Geodynamics*. pp. 281-313.
- [Waterfield 1938] Waterfield R.L.: 1938, 'A hundred years of Astronomy'. *Duckworth*.
- [Wigner 1959] Wigner E.P.: 1959, 'Group theory'. *Academic Press*.
- [Williams 1994] Williams J.G.: 1994, 'Contributions to the Earth's obliquity rate, precession and nutation'. *Astron. J.* **108**, N.2, pp. 711-724.
- [Williams 1995] Williams J.G.: 1995, 'Planetary-induced nutation of the Earth: direct terms'. *Astron. J.* **110**, N.3, pp. 1420-1426.
- [Woolard 1953] Woolard : 1953, 'Theory of the rotation of the Earth around its center of mass'. *Astronomical Papers prepared for the use of American Ephemerides and Nautical Almanac*. Vol. **XV**, Part. **I**.
- [Yan & Groten 1992] Yan H.J. and Groten E.: 1992, 'Discussion on the origin of right ascension'. *Manuscripta Geodaetica* **17**, pp. 65-86.
- [Zhu & Groten 1989] Zhu S.Y. and Groten E.: 1989, 'Various aspects of numerical determination of nutation constants. I. Improvement of rigid-Earth nutation'. *Astron. J.* **98**, N.3, pp. 1104-1111.
- [Zhu et al. 1989] Zhu S.Y., Groten E. and Reigber Ch.: 1989, 'Various aspects of numerical determination of nutation constants. II. An improvement nutation series for the deformable Earth'. *Astron. J.* **99**, N.3, pp. 1024-1044.